

Cohomologie cristalline : un survol

Antoine Chambert-Loir

Résumé. — Ce texte a pour origine trois exposés de Luc Illusie, Farid Mokrane et l'auteur à l'École normale supérieure les 31 mai, 7 et 16 juin 1995.

Le premier exposé introduit la cohomologie cristalline et le complexe de de Rham–Witt, en essayant de donner une idée correcte de quelques preuves, notamment des théorèmes de comparaison entre cohomologie cristalline et cohomologie de de Rham d'une part, et cohomologie cristalline et (hyper)cohomologie du complexe de de Rham–Witt d'autre part.

Le deuxième exposé expose la théorie des F-cristaux, de leurs polygones de Newton et de Hodge, et le lien entre la cohomologie de de Rham–Witt et les pentes de Frobenius sur la cohomologie cristalline.

Le troisième exposé est consacré aux variétés ordinaires : on y mentionne notamment les phénomènes d'ordinarité générique ainsi que des résultats analogues sur les corps de nombres.

Abstract. — This text stems out three introductory talks by Luc Illusie, Farid Mokrane and the author about crystalline cohomology and some of its developments.

The first talk introduces crystalline cohomology and the de Rham–Witt complex. We hope to have conveyed a correct idea of some proofs, especially of the comparisons theorems between crystalline cohomology and first de Rham cohomology, second, the (hyper)cohomology of the de Rham–Witt complex.

In the second talk will be found an exposition of the theory of F-crystals, their Newton and Hodge polygons, and of the link between de Rham–Witt cohomology and the slopes of the Frobenius operator on the crystalline cohomology.

We begin the last talk by explaining the so called conjugate spectral sequence and the Hodge–Witt decomposition. We then expose the theory of ordinary varieties, phenomenons of generic ordinarity, and analogous results over number fields.

Classification mathématique par sujets (1991). — 14F20, 14F30.

Mots clefs. — Cohomologie cristalline, complexe de de Rham–Witt, Frobenius, polygone de Newton, polygone de Hodge, pente, variété ordinaire.

Table des matières

Exposé I. Cohomologie cristalline et complexe de de Rham-Witt	
.....	3
1. Les origines	3
2. Cohomologie cristalline	8
3. Complexe de de Rham-Witt	15
4. Comparaison avec la cohomologie cristalline	20
Exposé II. Pentes du Frobenius cristallin	23
1. F-cristaux	23
2. Polygone de Newton et conjecture de Katz	25
3. Lien avec de Rham-Witt	27
Exposé III. Décompositions de Hodge-Witt, variétés ordinaires	
.....	29
1. Suite spectrale conjuguée	29
2. Décomposition de Hodge-Witt	31
3. Variétés ordinaires	33
4. Exemples de variétés ordinaires	36
5. Ordinarité générique	42
6. Cas des corps de nombres	44
Références	47

Je tiens à remercier très chaleureusement Luc Illusie qui m'a aidé à préparer l'exposé oral puis à rédiger ce rapport : il n'aurait probablement jamais vu le jour sans ses nombreuses et patientes explications.

Exposé I. COHOMOLOGIE CRISTALLINE ET COMPLEXE DE DE RHAM-WITT

1. Les origines

1.1. Les conjectures de Weil

André Weil, dans son article [57], certainement un de ceux qui ont le plus marqué la théorie des nombres de la seconde moitié de ce siècle, démontre l'« hypothèse de Riemann pour les courbes sur un corps fini ».

En général, si X est une variété algébrique (disons propre et lisse) définie sur le corps fini à q éléments $k = \mathbf{F}_q$, la fonction zêta de X est la série formelle

$$Z(X/k, t) = \prod_{\substack{x \in X \\ x \text{ fermé}}} \frac{1}{1 - t^{\deg x}} ;$$

cette série a un sens car X n'a pour tout entier d qu'un nombre fini de points fermés de degré d . En remarquant qu'un point fermé x de degré d donne lieu à d points rationnels distincts sur le corps $X(\mathbf{F}_{q^d})$, on peut démontrer que

$$Z(X/k, t) = \exp \left(\sum_{n \geq 1} \#X(\mathbf{F}_{q^n}) \frac{t^n}{n} \right) \in 1 + t\mathbf{Z}[[t]].$$

Autrement dit, la connaissance de la fonction zêta de X équivaut à celle du nombre de points rationnels de X sur toutes les extensions finies de k .

Lorsque X est une courbe projective lisse de genre g sur k , Weil a prouvé que la fonction $Z(X/k, t)$ vérifie les propriétés suivantes :

- i) $Z(X/k, t)$ est une fonction rationnelle de t à coefficients entiers ;
- ii) on a l'équation fonctionnelle $Z(X/k, 1/qt) = q^{1-g} t^{2-2g} Z(X/k, t)$;
- iii) $Z(X/k, t)$ n'admet que 0 et $1/q$ comme pôles, leur multiplicité est 1 ;
- iv) les zéros complexes de $Z(X/k, t)$ vérifient $|t| = \sqrt{q}$.

Quand X est une variété algébrique arbitraire, Dwork ([10], voir aussi [11]) a démontré de manière « élémentaire », en utilisant l'analyse ultramétrique p -adique (p est la caractéristique de \mathbf{F}_q), que la fonction zêta de X est une fraction rationnelle.

Soit \bar{k} une clôture algébrique de k . Alors, $\bar{X} = X \otimes_k \bar{k}$ est muni d'un endomorphisme φ donné dans une carte affine définie sur k par l'élévation des coordonnées à la puissance q . Les points fixes de φ^n sont ainsi exactement les points rationnels de X sur le corps \mathbf{F}_{q^n} . Pour une variété projective lisse sur k , Weil remarque ainsi dans [57] que $Z(X/k, t)$ est bien une fraction rationnelle à condition de supposer l'existence d'une théorie cohomologique pour les variétés sur un corps fini à valeurs dans des espaces vectoriels de dimension finie sur un corps de caractéristique zéro dans laquelle on pourrait appliquer une formule des points fixes de Lefschetz.

Dans le cadre peut-être plus classique des variétés différentiables, on a en effet une formule qui calcule le nombre de points fixes d'un morphisme φ d'une variété différentiable compacte M dans elle-même, assortis de multiplicités, comme la somme alternée des traces de φ agissant sur, par exemple, les espaces vectoriels de cohomologie de de Rham de M .

Les conditions nécessaires sur une telle cohomologie ont rapidement été formalisées sous le nom de « cohomologie de Weil » (voir [35]). La construction d'une telle théorie cohomologique est l'une des motivations de Grothendieck lorsqu'il élabore la théorie des schémas, et en particulier lorsqu'il étudie leur « topologie étale ». Pour tout nombre premier ℓ qui ne divise pas q , la cohomologie ℓ -adique développée par Grothendieck et ses élèves est en effet une cohomologie de Weil.

1.2. *Rappels sur la cohomologie ℓ -adique*

Soient k un corps de caractéristique p et X un schéma séparé de type fini sur k . Si \bar{k} est une clôture algébrique de k et ℓ un nombre premier, on peut considérer les groupes de *cohomologie étale* de $X \otimes \bar{k}$, cf. [17, 16, 43] :

$$H^i(X \otimes \bar{k}, \mathbf{Z}_\ell) := \varprojlim_n H_{\text{ét}}^i(X \otimes \bar{k}, \mathbf{Z}/\ell^n \mathbf{Z}), \quad H^i(X \otimes \bar{k}, \mathbf{Q}_\ell) := \mathbf{Q}_\ell \otimes H^i(X \otimes \bar{k}, \mathbf{Z}_\ell).$$

Pour tout i , $H^i(X \otimes \bar{k}, \mathbf{Z}_\ell)$ est un espace vectoriel sur \mathbf{Q}_ℓ , muni d'une action continue de $\text{Gal}(\bar{k}/k)$; si $\ell \neq p$ ou si X est propre, il est de plus de dimension finie. De même, on peut considérer les groupes de cohomologie étale à support propre $H_c^i(X \otimes \bar{k}, \mathbf{Q}_\ell)$ qui sont pour tout ℓ des \mathbf{Q}_ℓ -espaces vectoriels de dimension finie munis d'une action continue de $\text{Gal}(\bar{k}/k)$. Si d est la dimension de X , $H^i(X \otimes \bar{k}, \mathbf{Q}_\ell) = H_c^i(X \otimes \bar{k}, \mathbf{Q}_\ell) = 0$ pour $i \notin [0, 2d]$.

Supposons $\ell \neq p$. Rappelons que les modules de Tate ℓ -adiques sont les $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ -modules définis par :

$$\mathbf{Z}/\ell^n \mathbf{Z}(1) = \mu_{\ell^n}(\bar{k}), \quad \mathbf{Z}_\ell(1) = \varprojlim_n \mathbf{Z}/\ell^n(1) \quad \text{et} \quad \mathbf{Q}_\ell(1) = \mathbf{Q}_\ell \otimes \mathbf{Z}_\ell(1).$$

On note $\mathbf{Q}_\ell(-1)$ le dual de $\mathbf{Q}_\ell(1)$ et $\mathbf{Q}_\ell(n)$ le produit tensoriel $\mathbf{Q}_\ell(1)^{\otimes n}$ si $n \geq 0$ et $\mathbf{Q}_\ell(-1)^{\otimes |n|}$ si $n < 0$. Si V est un $\mathbf{Q}_\ell[\text{Gal}(\bar{k}/k)]$ -module et $n \in \mathbf{Z}$, on notera $V(n)$ le produit tensoriel $V \otimes_{\mathbf{Q}_\ell} \mathbf{Q}_\ell(n)$.

Supposons que X est lisse sur k , purement de dimension d . On dispose dans ce cas d'une *dualité de Poincaré*, compatible à l'action du groupe de Galois, entre $H^i(X \otimes \bar{k}, \mathbf{Q}_\ell)$ et $H_c^{2d-i}(X \otimes \bar{k}, \mathbf{Q}_\ell)(d)$. En fait, pour X propre et lisse sur k , $X \mapsto H^i(X \otimes \bar{k}, \mathbf{Q}_\ell)$ est une « cohomologie de Weil » (cf. [35], dualité de Poincaré, formule de Künneth, classes de cycles).

Supposons que $k = \mathbf{F}_q$. Si X/k est propre et lisse, géométriquement connexe, de dimension d . Si $F_q = \sigma_q^{-1}$ est le Frobenius géométrique, $\sigma_q \in \text{Gal}(\bar{k}/k)$ étant le Frobenius arithmétique $a \mapsto a^q$, on peut définir des polynômes

$$P_i = \det(1 - F_q t | H_c^i(X \otimes \bar{k}, \mathbf{Q}_\ell) \in \mathbf{Q}_\ell[t] ;$$

on a par exemple $P_0(t) = 1 - t$ et $P_{2d}(t) = 1 - q^d t$. Grothendieck a démontré [16] la formule des traces de Lefschetz en cohomologie étale, d'où résulte l'égalité

$$Z(X/k, t) = \frac{P_1(t) \cdots P_{2d-1}(t)}{P_0(t) \cdots P_{2d}(t)},$$

et en particulier la rationalité de la fonction zêta de X (première conjecture de Weil). La deuxième conjecture de Weil (équation fonctionnelle) est alors une conséquence de la dualité de Poincaré. Deligne [8] a prouvé les deux autres conjectures de Weil (« hypothèse de Riemann » et indépendance en $\ell \neq p$) : les polynômes P_i sont à coefficients entiers indépendants de $\ell \neq p$, et si $P_i(t) = \prod_{j=1}^{b_i} (1 - a_{ij} t)$, alors $|a_{ij}| = q^{i/2}$. Il prouve aussi que les a_{ij} sont des unités ℓ -adiques pour tout $\ell \neq p$.

On peut alors se poser deux questions :

- (a) quelles sont les valuations p -adiques des a_{ij} ?
- (b) si $k = \mathbf{Q}$ et si X/\mathbf{Q} est un schéma propre et lisse, on a de même une représentation ρ du groupe $\text{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ sur $H^i(X \otimes \bar{\mathbf{Q}}, \mathbf{Q}_\ell)$. Fixons un nombre premier p et un plongement de $\bar{\mathbf{Q}}$ dans $\bar{\mathbf{Q}}_p$, quelle est alors la restriction de ρ à $\text{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$?

Ces deux problèmes sont liés à la réduction de X en p . Si $p \neq \ell$, la restriction de ρ au sous-groupe d'inertie de $\mathrm{GL}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)$ est quasi-unipotente (Grothendieck, [55, Appendice] et [18, I, 1.1]) et cette restriction est même triviale si l'on a bonne réduction en p . Ce résultat est un analogue du théorème de monodromie complexe, dû aussi à Grothendieck ([18, I, 3.3]).

1.3. Vers la cohomologie cristalline

Dans tout ce paragraphe, k est un corps de caractéristique $p > 0$ et X est un schéma propre et lisse sur k , purement de dimension d .

Quelles sont alors les théories cohomologiques dont on dispose ?

– la cohomologie étale $H^i(X \otimes \overline{k}, \mathbf{Z}_p)$. Elle fournit des groupes nuls pour $i \notin [0, d]$. En effet, on a la suite exacte d'Artin–Schreier (exacte pour la topologie étale)

$$0 \rightarrow (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})_X \rightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{1-F} \mathcal{O}_X \rightarrow 0,$$

où F est le Frobenius absolu qui est l'identité sur l'espace topologique et l'élévation à la puissance p sur le faisceau structural. D'autre part, on montre (descente étale ou fppf) l'égalité

$$H_{\text{ét}}^i(X, \mathcal{O}_X) = H_{\text{Zar}}^i(X, \mathcal{O}_X)$$

pour tout $i \geq 0$, l'indice ét (resp. Zar) signifiant que l'on calcule la cohomologie du faisceau pour la topologie étale (resp. Zariski). Ainsi, la suite exacte longue de cohomologie étale, la nullité de la cohomologie Zariski en degré plus grand que la dimension et la surjectivité de $1 - F$ sur $H^i(\mathcal{O}_X)$ entraînent que $H^i(X, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) = 0$ si $i > d$. Par suite, $H^i(X, \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}) = 0$ pour $i > d$ et $n \geq 0$, et de même pour les coefficients \mathbf{Z}_p ou \mathbf{Q}_p .

De toutes façons, Serre a remarqué (cf. [15], p. 315, ou [17], exposé IX, §0) qu'il n'est pas possible de construire une cohomologie de Weil en caractéristique p à valeurs dans des \mathbf{Q}_p -espaces vectoriels : si l'on veut que le H^1 d'une courbe elliptique E soit de dimension 2, on obtient ainsi une représentation des endomorphismes de E dans $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, ce qui est impossible si E est supersingulière et $\mathrm{End}(E)$ une algèbre de quaternions.

– la cohomologie de Hodge $H_{\text{Hdg}}^n(X/k) = \bigoplus_{i+j=n} H^i(X, \Omega_{X/k}^j)$ ou la cohomologie de de Rham $H_{\text{dR}}^n(X/k) = H^n(X, \Omega_{X/k}^\bullet)$. Pour X/k propre et lisse, on dispose d'une dualité, d'une formule des traces, mais ce sont des espaces vectoriels sur k , ce qui empêche de compter des points rationnels. On trouvera

néanmoins dans [18, exposé XVII] une formule de congruence pour la fonction zêta.

– la cohomologie de Serre $H^i(X, W\mathcal{O}_X)$, où $W\mathcal{O}_X$ est le faisceau des vecteurs de Witt sur le faisceau structural [53]. Ce sont bien des modules sur $W(k)$, mais seulement en dimension $\leq d$. De plus, ce sont plus ou moins des relèvements p -adiques de $H^i(X, \mathcal{O}_X)$, alors qu'on voudrait relever la cohomologie de Hodge ou de de Rham. Enfin, elle n'est pas nécessairement de type fini, comme le montre l'exemple du H^2 d'un produit de deux courbes elliptiques.

L'idée de Grothendieck est alors la suivante. Supposons k parfait de caractéristique $p > 0$ et notons $W = W(k)$. Supposons que X se relève en un schéma propre et lisse Z/W , c'est-à-dire qu'il existe un schéma propre et lisse Z/W tel que $X = Z \times_{\text{Spec } W} \text{Spec } k$. On peut alors définir le complexe de de Rham de Z sur W et en particulier prendre son hypercohomologie $H_{\text{dR}}^i(Z/W) := \mathbf{H}^i(Z, \Omega_{Z/W}^\bullet)$. Grothendieck (cf. [15]) a pensé que ces groupes devraient être indépendants du choix de Z/W relevant X/k .

Pourquoi était-il naturel de penser que ce serait indépendant ? En fait, vers 1966, Dwork et Monsky–Washnitzer [44] avaient étudié le cas où X est affine lisse sur k et établi une invariance analogue pour une variante convenable de la cohomologie de de Rham. De plus, la connexion de Gauß–Manin fournit une explication : supposons qu'on dispose d'une déformation universelle $f : \mathcal{X} \rightarrow S = \text{Spf } W[[t_1, \dots, t_r]]$ de X/k , de sorte que tout schéma Z/W relevant X correspond à un point $x \in S(W)$ (c'est-à-dire un morphisme continu $W[[t]] \rightarrow W$) tel que

$$Z \simeq \mathcal{X} \times_S W = \mathcal{X} \otimes_{W[[t]]} (W, x).$$

Notons alors $\mathcal{H}^i = R^i f_* \Omega_{\mathcal{X}/S}^\bullet$ la cohomologie de de Rham relative et supposons les \mathcal{H}^i libres pour tout i et de formation compatible à tout changement de base. Alors, $H_{\text{dR}}^i(Z/W) = x^* \mathcal{H}^i = \mathcal{H}^i \otimes_{W[[t]]} (W, x)$.

Or, les \mathcal{H}^i sont munis d'une connexion naturelle, la connexion de Gauß–Manin

$$\nabla_{\text{GM}} : \mathcal{H}^i \rightarrow \mathcal{H}^i \otimes \Omega_{S/W}^1.$$

Si Z_1 et Z_2 sont deux relèvements de X/k , ils correspondent à deux morphismes x et $y : W[[t]] \rightarrow W$ tels que $x \equiv y \pmod{p}$. Alors, on peut définir un *isomorphisme* $\chi(x, y) : \mathcal{H}^i \otimes (W, x) \rightarrow \mathcal{H}^i \otimes (W, y)$ par la formule

$$\chi(x, y)(s) = \sum_{|\underline{n}| \geq 0} \frac{(x(t) - y(t))^{\underline{n}}}{\underline{n}!} \left(\nabla_{\text{GM}} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{\underline{n}} s \right) (y).$$

(On peut montrer que la série converge, cf. [33].) Ces isomorphismes sont compatibles :

$$\chi(x, y)\chi(y, z) = \chi(x, z), \quad \chi(x, x) = \text{Id}.$$

2. Cohomologie cristalline

2.1. Puissances divisées

Soit A un anneau et I un idéal de A . Une PD-structure sur I est une suite d'applications $\gamma_n : I \rightarrow A$ pour $n \geq 0$ telles que, moralement, « $\gamma_n(x) = x^n/n!$ ». Précisément, on impose les conditions suivantes :

- $\gamma_0(x) = 1$ et $\gamma_1(x) = x$ pour tout $x \in I$;
- $\gamma_n(x) \in I$ si $n \geq 1$ et $x \in I$;
- $\gamma_n(x + y) = \sum_{i+j=n} \gamma_i(x)\gamma_j(y)$ pour tous x et $y \in I$;
- $\gamma_n(\lambda x) = \lambda^n \gamma_n(x)$ pour tout $x \in I$ et tout $\lambda \in A$;
- $\gamma_n(x)\gamma_m(x) = \binom{m+n}{n} \gamma_{m+n}(x)$ pour tout $x \in I$ et tous $m, n \in \mathbf{N}$;
- $\gamma_m(\gamma_n(x)) = \frac{(mn)!}{m!(n!)^m} \gamma_{mn}(x)$ pour tout $x \in I$ et tous $m, n \in \mathbf{N}$. (Remarquons que $(mn)!/(m!(n!)^m)$ est le nombre de façons de répartir mn objets en m classes de n , donc est entier.)

2.2. Exemples

- i) Soient k un corps parfait de caractéristique $p > 0$, $W(k)$ l'anneau des vecteurs de Witt de k et considérons l'idéal $(p) \subset W(k)$. Pour tout entier $n \geq 0$, la valuation p -adique de $p^n/n!$ est positive, elle est non nulle pour $n \geq 1$. On peut ainsi définir une PD-structure sur l'idéal (p) en posant $\gamma_n(p) = p^n/n!$.
- ii) Soit Λ un anneau; on définit comme suit une Λ -algèbre à puissances divisées :

$$\Lambda\langle x_1, \dots, x_r \rangle = \bigoplus_{n \geq 0} \Gamma^n,$$

où une base de Γ^n comme Λ -module est formée des symboles $x_1^{[k_1]} \cdots x_r^{[k_r]}$ avec $k_1 + \cdots + k_r = n$ et les $k_i \in \mathbf{N}$. La structure d'algèbre est définie par les relations $x_i^{[m]} x_i^{[n]} = \binom{m+n}{n} x_i^{[m+n]}$, de sorte que $x_i^{[k]}$ vaut moralement « $(x_i)^k/k!$ ». L'idéal $I = \Lambda^+ \langle x_1, \dots, x_r \rangle = \bigoplus_{n \geq 1} \Gamma^n$ possède alors une unique PD-structure telle que $\gamma_n(x_i) = x_i^{[n]}$ pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$ et tout $n \geq 1$.

Remarque 2.1. — Si A est annulé par un entier $n \geq 2$ et si l'idéal $I \subset A$ possède une PD-structure, alors I est un nil-idéal (tout élément est nilpotent) puisque $x^n = n! \gamma_n(x) = 0$ pour tout $x \in I$. En particulier $\text{Spec } A$ et $\text{Spec}(A/I)$ ont même espace topologique sous-jacent.

2.3. Site cristallin et cohomologie cristalline

Soit k un corps parfait de caractéristique $p > 0$. Notons $W = W(k)$ l'anneau des vecteurs de Witt, W_n l'anneau $W_n(k) = W/p^n$ (donc $W_1 = k$). Soit X un k -schéma.

2.3.1. *Site cristallin.* — On définit le site cristallin $\text{Cris}(X/W_n)$ de la façon suivante :

- les objets sont les diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} U & \xhookrightarrow{i} & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec } k & \longrightarrow & \text{Spec } W_n \end{array}$$

où $U \subset X$ est un ouvert de Zariski, $i : U \hookrightarrow V$ est un PD-épaississement de U , c'est-à-dire une immersion fermée de W_n -schémas telle que l'idéal $\text{Ker}(\mathcal{O}_V \rightarrow \mathcal{O}_U)$ soit muni d'une PD-structure δ compatible à la PD-structure canonique sur $pW_n \subset W_n$ définie par $\gamma_n(p) = p^n/n!$ (i.e. on a $\delta(pa) = \gamma_n(p)a^n$ si $pa \in \text{Ker}(\mathcal{O}_V \rightarrow \mathcal{O}_U)$).

- les morphismes de (U, V, δ) vers (U', V', δ') sont les diagrammes commutatifs formés d'une immersion ouverte $U \hookrightarrow U'$ et d'un morphisme $V \rightarrow V'$ compatible aux puissances divisées.

- les familles couvrantes sont les familles de morphismes $(U_i, V_i, \delta_i) \rightarrow (U, V, \delta)$ tels que $V_i \rightarrow V$ est une immersion ouverte et $V = \bigcup_i V_i$.

On peut donner une description assez explicite des faisceaux sur $\text{Cris}(X/W_n)$ (pour plus de détails, voir [1, III.1.1.4, p. 182–183]) : soit F un tel faisceau et (U, V) un objet de $\text{Cris}(X/W_n)$. En associant à un ouvert W de V les sections

de F sur $(U \times_V W, W)$, on définit un faisceau sur V pour la topologie de Zariski ; pour un morphisme $g : (U, V) \rightarrow (U', V')$ dans $\text{Cris}(X/W_n)$, on obtient un morphisme $g_F^* : g^{-1}F_{(U', V')} \rightarrow F_{(U, V)}$ vérifiant :

- la condition de transitivité lorsqu'on se donne deux morphismes $(U, V) \rightarrow (U', V') \rightarrow (U'', V'')$;
- que g_F^* est un isomorphisme si $V \rightarrow V'$ est une immersion ouverte et $U = U' \times_{V'} V$.

Réciproquement, si on se donne pour tout objet (U, V) de $\text{Cris}(X/W_n)$ un faisceau $F_{(U, V)}$ pour la topologie de Zariski sur V , ainsi que pour tout morphisme $g : (U, V) \rightarrow (U', V')$ dans $\text{Cris}(X/W_n)$ un morphisme de transition $g_F^* : g^{-1}F_{(U', V')} \rightarrow F_{(U, V)}$ vérifiant ces deux propriétés, on définit un faisceau sur le site cristallin.

On obtient ainsi le *faisceau structural*, noté \mathcal{O}_{X/W_n} , qui associe à tout objet (U, V, δ) du site cristallin $\text{Cris}(X/W_n)$ le faisceau \mathcal{O}_V .

2.3.2. Topos cristallin et functorialité. — Une fois défini le site cristallin, on peut considérer le topos cristallin associé (i.e. la catégorie des faisceaux sur ce site), noté $(X/W_n)_{\text{cris}}$. L'intérêt du topos cristallin est que l'on dispose alors d'une functorialité : si $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme de k -schémas, on peut lui associer un morphisme $f^{-1} : (Y/W_n)_{\text{cris}} \rightarrow (X/W_n)_{\text{cris}}$. Si le passage aux topos est nécessaire, c'est qu'un épaissement de Y ne donne pas forcément par image inverse un épaissement de X ; le passage aux faisceaux permet en revanche de considérer le faisceau sur X (justement pas forcément représentable) obtenu par image inverse d'un épaissement de Y .

2.3.3. Cohomologie cristalline. — La cohomologie cristalline est par définition la cohomologie du faisceau structural : on pose

$$H^i(X/W_n) = H^i((X/W_n)_{\text{cris}}, \mathcal{O}_{X/W_n}) \quad \text{et} \quad H^i(X/W) = \varprojlim_n H^i(X/W_n).$$

Il existe aussi un homomorphisme de projection u du topos cristallin sur le topos Zariskien $(X/W_n)_{\text{cris}} \rightarrow X_{\text{Zar}}$ (cf. [1, III, 3.2]). Si E est un faisceau cristallin sur X/W_n , le faisceau u_*E sur X (pour la topologie de Zariski) est défini de sorte que l'ensemble de ses sections sur un ouvert $U \subset X$ soit égal à $\Gamma((U/W_n)_{\text{cris}}, E)$. Si on munit X du faisceau constant W_n , c'est un morphisme de topos annelés. (En revanche, ce n'est pas un morphisme de topos annelés si X est muni de \mathcal{O}_X .) Par définition, $\Gamma(X_{\text{Zar}}, u_*E) = \Gamma(X/W_n, E)$ et pour tout complexe $E \in D^+(X/W_n, \mathcal{O}_{X/W_n})$, $R\Gamma(X_{\text{Zar}}, Ru_*E)$ est isomorphe à

$R\Gamma(X/W_n, E)$. En particulier,

$$H^i(X/W_n, \mathcal{O}_{X/W_n}) \simeq H^i(X_{\text{Zar}}, Ru_* \mathcal{O}_{X/W_n}).$$

2.3.4. *Calcul.* — Soit $j : X \hookrightarrow Z$ une immersion fermée de X dans un schéma Z lisse sur W_n . L'idéal $J = \text{Ker}(\mathcal{O}_Z \rightarrow \mathcal{O}_X)$ n'a pas forcément de PD-structure, si bien que les voisinages infinitésimaux de X dans Z (les schémas obtenus en considérant l'espace topologique X muni des faisceaux d'anneaux \mathcal{O}_Z/J^k) n'ont pas nécessairement de puissances divisées.

Considérons donc le PD-voisinage infinitésimal de X dans Z ; c'est un PD-épaississement $\tilde{j} : X \hookrightarrow \tilde{Z}$ universel parmi les PD-épaississements munis d'un morphisme $\tilde{Z} \rightarrow Z$ tel que la composition $X \hookrightarrow \tilde{Z} \rightarrow Z$ soit égale à j . *Grosso modo*, \tilde{Z} est obtenu en rajoutant des puissances divisées à J de façon universelle. Si \tilde{J} est l'idéal de X dans \tilde{Z} , on a ainsi $\mathcal{O}_{\tilde{Z}}/\tilde{J} = \mathcal{O}_X$. Il existe de plus une unique connexion intégrable

$$d : \mathcal{O}_{\tilde{Z}} \rightarrow \mathcal{O}_{\tilde{Z}} \otimes_{\mathcal{O}_Z} \Omega_{Z/W}^1$$

telle que $d\gamma_n(x) = \gamma_{n-1}(x) \otimes dx$ pour tout $x \in \tilde{J}$. Ainsi, $\mathcal{O}_{\tilde{Z}} \otimes \Omega_{Z/W}^\bullet$ est un complexe de faisceaux abéliens sur \tilde{Z} qui a même espace sous-jacent que X . Le théorème fondamental de Berthelot et Grothendieck est alors le suivant :

THÉORÈME 2.2 (Berthelot, [1, V, 2.3.2]). — *Il existe un isomorphisme canonique entre la cohomologie cristalline $H^i(X/W_n)$ et l'hypercohomologie $\mathbf{H}^i(X, \mathcal{O}_{\tilde{Z}} \otimes_{\mathcal{O}_Z} \Omega_{Z/W}^\bullet)$ de ce complexe.*

COROLLAIRE 2.3. — *Si Z/W_n est un relèvement lisse de X , alors $\tilde{Z} = Z$ et la cohomologie cristalline de X/W_n est canoniquement isomorphe à la cohomologie de de Rham $H_{\text{dR}}^i(Z/W_n)$ de Z .*

Idée de la démonstration. — Les définitions générales de la cohomologie dans un topos font intervenir « l'objet final » qui est le faisceau e associé au préfaisceau dont les sections sur un ouvert non vide est l'ensemble $\{0\}$ à un élément. Dans le cas du topos d'un espace topologique X , ce faisceau est représenté par l'ouvert X , mais dans le cas cristallin, ce faisceau n'est pas représentable. En revanche, quand X est plongé dans un W_n -schéma lisse Z , on montre que le PD-voisinage infinitésimal \tilde{Z} couvre l'objet final. En l'occurrence, il s'agit de montrer que pour tout $(U, T, \delta) \in \text{Cris}(X/W_n)$, le morphisme $U \rightarrow \tilde{Z}$ se prolonge localement sur T en un morphisme $T \rightarrow \tilde{Z}$: d'après la définition de \tilde{Z} , il faut ainsi prouver que l'immersion fermée $U \rightarrow Z$ se prolonge localement sur

T en une immersion $T \rightarrow Z$, ce qui se démontre en utilisant le fait que $U \rightarrow T$ est une nil-immersion et que Z/W_n est lisse.

On introduit ensuite le complexe de Čech–Alexander $\check{C}A^\bullet((\tilde{Z} \rightarrow e), \mathcal{O}_{X/W_n})$ défini par

$$\check{C}A^m((\tilde{Z} \rightarrow e), \mathcal{O}_{X/W_n}) = \Gamma(\underbrace{\tilde{Z} \times_e \cdots \times_e \tilde{Z}}_{m+1 \text{ facteurs}}, \mathcal{O}_{X/W_n}).$$

Les diverses applications naturelles entre les produits de \tilde{Z} en font un complexe cosimplicial de groupes abéliens

$$\check{C}A^\bullet = \left(\check{C}A^0 \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} \check{C}A^1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} \check{C}A^2 \cdots \right)$$

qui calcule (cf. [17, V, 1.11]) $Ru_* \mathcal{O}_{X/W_n}$.

En outre, le faisceau $\tilde{Z} \times_e \cdots \times_e \tilde{Z}$ est représenté par le voisinage $\tilde{Z}^{(m)}$ à puissances divisées de X dans Z^{m+1} . On peut aussi remplacer les applications face par la somme alternée des faces. Ainsi, $\check{C}A^\bullet$ est isomorphe au complexe (vu comme complexe de faisceaux sur l'espace topologique X)

$$\mathcal{O}_{\tilde{Z}} \xrightarrow{d_1 - d_0} \mathcal{P} \xrightarrow{d_2 - d_1 + d_0} \mathcal{P} \otimes \mathcal{P} \cdots$$

en remarquant que $\mathcal{O}_{\tilde{Z}^{(m)}}$ est isomorphe (comme faisceau sur X) au produit tensoriel m fois sur $\mathcal{O}_{\tilde{Z}}$ du faisceau $\mathcal{P} = \mathcal{O}_{\tilde{Z}^{(1)}}$ des parties principales à puissances divisées.

En vertu du *lemme de Poincaré cristallin* dont on cite une version naïve plus bas, le faisceau $\mathcal{O}_{\tilde{Z}}$ admet une résolution canonique

$$\mathcal{O}_{\tilde{Z}} \xrightarrow{d_1} \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P} \otimes \Omega_{Z/S}^1 \rightarrow \mathcal{P} \otimes \Omega_{Z/S}^2 \cdots$$

Cette résolution fournit fonctoriellement des résolutions de tous les $\mathcal{P} \otimes \cdots \otimes \mathcal{P}$, d'où un complexe double $C^{\bullet\bullet}$ (encadré dans le diagramme 1 ci-dessous) qui calcule la cohomologie de \mathcal{O}_{X/W_n} .

On remarque que le complexe $C^{\bullet\bullet}$ est naturellement augmenté (par la première ligne dans le diagramme) et que les colonnes du complexe augmenté sont obtenues par « oubli d'une face » à partir d'un complexe cosimplicial de groupes abéliens. En utilisant les application dégénérescence, on peut montrer (cf. [1, V, 2.2.1] ou [21]) qu'un tel complexe est homotope à zéro. En définitive, le complexe double $C^{\bullet\bullet}$ est isomorphe dans la catégorie dérivée au complexe de Čech–Alexander de gauche et au complexe de de Rham du haut, d'où le théorème. \square

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \mathcal{O}_{\tilde{Z}} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\tilde{Z}} \otimes \Omega_{Z/S}^1 & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow d_0 & & \downarrow & & \\
 & & \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{P} \otimes \Omega_{Z/S}^1 & \longrightarrow & \cdots \\
 & \mathcal{O}_{\tilde{Z}} & \xrightarrow{d_1} & \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{P} \otimes \Omega_{Z/S}^1 & \longrightarrow \cdots \\
 & \downarrow d_1 - d_0 & & \downarrow d_1 - d_0 & & \downarrow & \\
 & \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{P} \otimes \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{P} \otimes \mathcal{P} \otimes \Omega_{Z/S}^1 & \longrightarrow \cdots \\
 & \downarrow d_2 - d_1 + d_0 & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & \mathcal{P} \otimes \mathcal{P} & \longrightarrow & \cdots & & & \\
 & \downarrow & & & & & \\
 & \vdots & & & & &
 \end{array}$$

DIAGRAMME 1. Complexes de Čech–Alexander et de de Rham

Enfin, il faut prouver le lemme de Poincaré cristallin. La version ci-dessous résout le cas particulier $X = \text{Spec } k$, $Z = \text{Spec } W_n[t]$, $\tilde{Z} = \text{Spec } W_n\langle t \rangle$.

LEMME 2.4 (Lemme de Poincaré cristallin). — *Soit A un anneau. Le complexe de de Rham de $A[t_1, \dots, t_n]$ à valeurs dans l'anneau $A\langle t_1, \dots, t_n \rangle$ (muni de sa connexion intégrable $t_i^{[k]} \mapsto t_i^{[k-1]} dt_i$) est une résolution de A .*

Démonstration. — Si $n = 1$, c'est le complexe $A\langle t \rangle \rightarrow A\langle t \rangle dt$ donné par

$$\sum_{k \geq 0} a_k t^{[k]} \mapsto \sum_{k \geq 1} a_k t^{[k-1]} dt.$$

On voit ainsi que le complexe augmenté $0 \rightarrow A \rightarrow A\langle t \rangle \rightarrow A\langle t \rangle dt \rightarrow 0$ est acyclique, d'où le lemme pour $n = 1$.

Notons $\omega_{A\langle t_1, \dots, t_n \rangle}^\bullet$ ce complexe et supposons par récurrence que le morphisme $A \rightarrow \omega_{A\langle t_1, \dots, t_{n-1} \rangle}^\bullet$ est un quasi-isomorphisme. Alors, $\omega_{A\langle t_n \rangle}^\bullet$ est un complexe dont les termes sont des modules localement libres sur A , si bien que le morphisme

$$A \otimes \omega_{A\langle t_n \rangle}^\bullet \longrightarrow \omega_{A\langle t_1, \dots, t_{n-1} \rangle}^\bullet \otimes \omega_{A\langle t_n \rangle}^\bullet$$

est encore un quasi-isomorphisme ; en définitive, le morphisme de complexes $A \longrightarrow \omega_{A\langle t_1, \dots, t_n \rangle}^\bullet$ est un quasi-isomorphisme, comme annoncé.

(En fait, cette preuve est la preuve d'analyse classique qui consiste à isoler la dernière variable, i.e. à écrire une forme fermée $\omega = \omega_1 \wedge dt_n + \omega_2$. On écrit $d = d' + \frac{\partial}{\partial t_n} \wedge dt_n$. Ainsi $d'\omega_2 = 0$ et $d'\omega_1 + (-1)^{n-1} \frac{\partial}{\partial t_n} \omega_2 = 0$. Ainsi, $\omega_2 = d'\eta_2$ (par récurrence) et $\omega_1 + (-1)^{n-1} \frac{\partial}{\partial t_n} \eta_2 = d'\eta_1$, par récurrence encore. On voit alors que $\omega = d(\eta_1 \wedge dt_n + \eta_2)$. Le fait de prendre A un anneau quelconque dans la récurrence est bien sûr essentiel.) \square

2.3.5. Frobenius. — Soit $F : X \rightarrow X$ le morphisme de Frobenius absolu (qui est l'identité sur l'espace topologique et l'élévation à la puissance p sur le faisceau structural). Notons $\sigma : W_n \rightarrow W_n$ le morphisme de Frobenius induit par le morphisme de Frobenius sur k ; alors, on dispose par functorialité d'un morphisme σ -linéaire sur la cohomologie cristalline $F : H^*(X/W_n) \rightarrow H^*(X/W_n)$.

Dans le cas où X se relève en un schéma Z lisse sur W_n , on a ainsi une action de Frobenius sur la cohomologie de de Rham $H_{\text{dR}}^*(Z/W_n)$ bien qu'en général, l'action de Frobenius ne se relève pas à Z . Par exemple, si X est une courbe elliptique et si Frobenius se relève, la courbe elliptique est nécessairement ordinaire (et le relèvement s'identifie au relèvement canonique de Serre–Tate), cf. le paragraphe III.4.6.

2.4. Propriétés

Supposons désormais que X/k est propre et lisse purement de dimension d . Alors les $H^i(X/W)$ sont des W -modules de type fini. Si K_0 est le corps de fractions de W , les $H^i(X/W) \otimes K_0$ sont alors des K_0 -espaces vectoriels de dimension finie, nuls pour $i \notin [0, 2d]$.

De plus, $X \mapsto H^i(X/W) \otimes K_0$ est une cohomologie de Weil : on dispose d'une dualité de Poincaré entre H^i et H^{2d-i} , de classes de cycles $Z^r(X) \rightarrow H^{2r}$, d'une formule de Künneth et d'une formule des traces de Lefschetz.

Supposons que $k = \mathbf{F}_q$ ($q = p^r$) et notons $F_q = F^r$. En utilisant la cohomologie cristalline, Berthelot démontre alors la rationalité de la fonction zêta de X en prouvant :

$$Z(X/\mathbf{F}_q, t) = \prod_{i=0}^{2d} \det(1 - F_q t | H^i(X/W) \otimes K_0)^{(-1)^{i+1}}.$$

Quand X/k est projectif et lisse, les résultats de Deligne [8] sur la conjecture de Weil ont permis alors à Katz et Messing [34] de prouver que le polynôme $P_i(t) = \det(1 - F_q t | H^i(X/W) \otimes K_0)$ est égal au polynôme obtenu par la cohomologie ℓ -adique ($\ell \neq p$). En particulier les nombres de Betti ℓ -adiques et cristallins sont les mêmes :

$$b_i = \dim_{\mathbf{Q}_\ell} H^i(X \otimes \bar{k}, \mathbf{Q}_\ell) = \dim_{K_0} H^i(X/W) \otimes K_0.$$

Soit A la variété d'Albanese de X/k . C'est une variété abélienne sur k , universelle pour les morphismes de X dans une variété abélienne. Alors, l'application $X \rightarrow A$ induit un *isomorphisme* $H^1(A/W) \rightarrow H^1(X/W)$. De plus [47, 41], $H^1(A/W)$ est le module de Dieudonné du groupe p -divisible $\varinjlim A[p^n]$ de A . Si $g = \dim A/k$, c'est un W -module libre de rang $2g$ muni de deux endomorphismes F et V tels que $FV = p$ (induits par les endomorphismes de même nom de A).

3. Complexe de de Rham–Witt

3.1. Pourquoi de Rham–Witt ?

Pour au moins deux raisons !

D'abord pour permettre un calcul « concret et intrinsèque » de la cohomologie cristalline, comme la cohomologie Zariski de X à valeurs dans un complexe de faisceaux canonique convenable.

Mais on veut aussi comparer la cohomologie cristalline aux autres cohomologies p -adiques. Rappelons en effet que $H^*(X/W_1) = H_{\text{dR}}^*(X/k)$ et que l'on a donc une application naturelle de la cohomologie cristalline vers la cohomologie de de Rham : $H^*(X/W) \rightarrow H_{\text{dR}}^*(X/k)$. Y a-t-il un analogue pour la cohomologie de Hodge ? Peut-on par exemple relier la cohomologie de Hodge à la cohomologie cristalline, de manière compatible à la suite spectrale de Hodge vers de Rham ? Peut-on relier $H_{\text{ét}}^*(X \otimes \bar{k}, \mathbf{Z}_p)$ à la partie de $H^*(X/W)$ où F agit par automorphisme ? Peut-on relier la cohomologie de Serre $H^*(X, W\mathcal{O}_X)$ à la cohomologie cristalline ?

Et peut-on expliquer ainsi les phénomènes pathologiques en caractéristique p comme la non-dégénérescence en E_1 de la suite spectrale de Hodge vers de Rham, ou l'inégalité éventuelle $h^{1,0} \neq h^{0,1}$?

Pour répondre à ces questions, Bloch [5] construit un tel complexe en utilisant la K-théorie ; il est toutefois limité par des hypothèses sur la dimension de X qui doit être $< p$, ainsi que par la restriction $p \neq 2$.

Deligne propose alors un canevas pour aborder ces questions par une méthode de calcul différentiel, inspirée de Lubkin [37]. Cette méthode donnera naissance au complexe de de Rham–Witt, développé par Illusie [25, 24] et Illusie–Raynaud [29].

Enfin, Kato parvient à étudier le cas $\dim X \geq p$ par la méthode de Bloch [30].

Il existe de nombreuses façons d’aborder le complexe de de Rham–Witt, cf. [26] pour un résumé des différentes approches. Nous expliquerons ici la définition « universelle » donnée dans [25].

3.2. Complexe de de Rham–Witt

3.2.1. *Rappels sur les vecteurs de Witt.* — Soit (X, \mathcal{O}_X) un espace annelé en \mathbf{F}_p -algèbres. On définit un faisceau d’algèbres $W\mathcal{O}_X$ dont les sections sur un ouvert U sont les suites (a_0, a_1, \dots) avec $a_i \in \mathcal{O}_X(U)$. L’addition et la multiplication sont données par des polynômes universels

$$S_n, \quad P_n \in \mathbf{Z}[X_0, \dots, X_n, Y_0, \dots, Y_n]$$

de sorte que

$$a + b = (a_0 + b_0, S_1(a, b), \dots) \quad \text{et} \quad a \cdot b = (a_0 b_0, P_1(a, b), \dots),$$

où par exemple

$$S_1 = X_1 + Y_1 + \frac{X_0^p + Y_0^p - (X_0 + Y_0)^p}{p} \quad \text{et} \quad P_1 = X_0^p Y_1 + X_1 Y_0^p + p X_1 Y_1.$$

L’anneau $W\mathcal{O}_X$ possède deux endomorphismes F (Frobenius) et V (Verschiebung — décalage en allemand), donnés si $a = (a_0, a_1, \dots)$ par

$$Fa = (a_0^p, a_1^p, \dots) \quad \text{et} \quad Va = (0, a_0, a_1, \dots) ;$$

ils vérifient de plus l’identité $FV = VF = p$. Si x et $y \in W\mathcal{O}_X$, on a l’égalité $xVy = V(Fxy)$.

On peut ainsi poser $W_n\mathcal{O}_X = W\mathcal{O}_X/V^n W\mathcal{O}_X$ qui est aussi le faisceau d’anneaux dont les sections sur un ouvert U sont les suites finies (a_0, \dots, a_{n-1}) d’éléments de $\mathcal{O}_X(U)$, muni des lois d’addition et de multiplication induites par les polynômes S_n et P_n . On a alors $W\mathcal{O}_X = \varprojlim_n W_n\mathcal{O}_X$.

Si $x \in \mathcal{O}_X$, on définit son représentant de Teichmüller $[x] = (x, 0, \dots) \in W\mathcal{O}_X$. On vérifie l'identité $[x][y] = [xy]$.

3.2.2. *(Pro)-complexe de de Rham-Witt.* — Le pro-complexe de de Rham-Witt $W_\bullet\Omega_X^\bullet$ est un système projectif $(W_n\Omega_X^\bullet)_{n \in \mathbb{N}}$, où $W_n\Omega_X^\bullet$ est pour tout n une algèbre différentielle graduée strictement anti-commutative (en abrégé *adg*). On a ainsi pour tout entier $n \geq 1$ un complexe

$$W_n\Omega_X^0 \xrightarrow{d} W_n\Omega_X^1 \xrightarrow{d} W_n\Omega_X^2 \xrightarrow{d} \dots \quad ;$$

on demande de plus que le système des $(W_n\Omega_X^0)_n$ soit égal à $(W_n\mathcal{O}_X)_n$, que soit donné un opérateur additif $V : W_n\Omega_X^i \rightarrow W_{n+1}\Omega_X^i$ qui soit le *Verschiebung* usuel sur $W_n\mathcal{O}_X$ et que soient vérifiées les identités

$$V(xy) = Vx dVy \quad \text{et} \quad (d[x])Vy = V([x]^{p-1}d[x]y)$$

pour tous x et $y \in \mathcal{O}_X$.

On démontre qu'il existe un objet universel pour ces propriétés, autrement dit un adjoint à gauche du foncteur $(W_n\Omega_X^\bullet \mapsto \mathcal{O}_X)$; de plus $W_n\Omega_X^\bullet$ est pour tout n un quotient du complexe de de Rham de $W_n\mathcal{O}_X$.

Pour $n = 1$, $W_1\Omega_X^\bullet$ est canoniquement isomorphe à Ω_X^\bullet .

Si \mathcal{O}_X est parfait (i.e. $F : \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X$ défini par $F(a) = a^p$ est un isomorphisme de faisceaux abéliens), alors $W_n\Omega_X^\bullet = W_n\mathcal{O}_X$ pour tout n .

Si X est un schéma sur un corps parfait k de caractéristique $p > 0$, $W_n\Omega_X^\bullet$ est une $W_n(k)$ -algèbre différentielle graduée.

PROPOSITION 3.1. — *Il existe une unique application additive $F : W_n\Omega_X^\bullet \rightarrow W_{n-1}\Omega_X^\bullet$ vérifiant les propriétés*

$$F(ab) = F(a)F(b), \quad FdV = d \text{ sur } W_n\mathcal{O}_X, \quad F(d[x]) = [x]^{p-1}d[x],$$

et telle que $F = \text{Res} \circ F_{\text{usuel}}$ sur $W_n\mathcal{O}_X$.

De plus, on a alors les identités suivantes :

$$FV = VF = p, \quad FdV = d, \quad xVy = V(Fxy).$$

(On a aussi $dF = pFd$, $Vd = pdV$.)

On peut montrer que l'endomorphisme \underline{F} du complexe $W_\bullet\Omega^\bullet$ induit par le Frobenius de X est égal à $p^i F$ sur $W_\bullet\Omega^i$. Ainsi, la proposition précédente exprime que \underline{F} est « divisible » par p^i sur $W_\bullet\Omega^i$. Dans [25], l'existence de F

repose sur la description explicite du complexe de de Rham-Witt dans le cas particulier suivant ([25, I, 2]) :

3.3. Exemple fondamental

Supposons que X soit un point et $\mathcal{O}_X = A = \mathbf{F}_p[T_1, \dots, T_N]$. Définissons deux anneaux :

$$B = \mathbf{Z}_p[T_1, \dots, T_N] \quad \text{et} \quad C = \bigcup_{r \geq 0} \mathbf{Q}_p[T_1^{p^{-r}}, \dots, T_N^{p^{-r}}].$$

Une forme $\omega \in \Omega_{C/\mathbf{Q}_p}^m$ s'écrit d'une manière unique sous la forme

$$\omega = \sum a_{i_1 \dots i_m}(\mathbb{T}) \frac{d\mathbb{T}_{i_1}}{\mathbb{T}_{i_1}} \wedge \dots \wedge \frac{d\mathbb{T}_{i_m}}{\mathbb{T}_{i_m}}.$$

Nous dirons que ω est entière si tous les coefficients a_i appartiennent à

$$\bigcup_{r \geq 0} \mathbf{Z}_p[T_1^{p^{-r}}, \dots, T_N^{p^{-r}}] \subset C.$$

Définissons le complexe E^\bullet des formes entières en posant

$$E^m = \{\omega \in \Omega_{C/\mathbf{Q}_p}^m ; \omega \text{ et } d\omega \text{ sont entières}\}.$$

Par exemple, $T_1^{1/p}$ n'appartient pas à E^0 , mais $pT_1^{1/p}$ y appartient. Si l'on munit l'anneau C des deux opérateurs F et V définis par

$$F(T_i) = T_i^p \quad \text{et} \quad V(T_i) = pT_i^{1/p},$$

F et V agissent sur le complexe $\Omega_{C/\mathbf{Q}_p}^\bullet$ et induisent des opérateurs correspondants sur le complexe E^\bullet des formes entières. Posons alors $E_n^m = E^m / (V^n E^m + dV^n E^{m-1})$, d'où un complexe d'algèbres graduées $\dots \rightarrow E_{n+1}^\bullet \rightarrow E_n^\bullet \rightarrow \dots$. De plus, V définit par passage au quotient un homomorphisme $V : E_n^\bullet \rightarrow E_{n+1}^\bullet$ qui vérifie $V(xy) = Vx dVy$. Comme on a de plus $E^0 / V^n E^0 \simeq W_n A$ par l'homomorphisme qui envoie T_i sur son représentant de Teichmüller $[T_i] = (T_i, 0, \dots)$, on a ainsi construit un V -pro-complexe.

THÉORÈME 3.2 ([25, I, 2.5]). — *Le morphisme $W_\bullet \Omega_A^\bullet \rightarrow E_\bullet$ défini par la propriété universelle du complexe de de Rham-Witt est un isomorphisme.*

3.4. Propriétés dans le cas lisse

Soit X un schéma lisse sur un corps parfait k de caractéristique $p > 0$. Pour tout entier n , $W_n\Omega_X^\bullet$ est une $W_n(k)$ -adg et le pro-objet « \varprojlim_n » $W_n\Omega_X^\bullet$ est sans p -torsion ; a fortiori, $W\Omega_X^i = \varprojlim_n W_n\Omega_X^i$ est sans p -torsion, si bien que $W\Omega_X^\bullet$ est une W -adg sans p -torsion. De plus, $W_n\Omega_X^i = W\Omega_X^i / (V^n W\Omega_X^i + dV^n W\Omega_X^{i-1})$ est un faisceau cohérent sur le schéma $W_n(X)$ (i.e. $|X|$ annelé par $W_n(\mathcal{O}_X)$).

Rappelons le théorème suivant :

THÉORÈME 3.3 (Cartier). — *Soit X un k -schéma de type fini. Il existe un unique homomorphisme p -linéaire d'algèbres graduées $C^{-1} : \bigoplus \Omega_X^i \rightarrow \bigoplus \mathcal{H}^i \Omega_X^\bullet$ tel que $C^{-1}(a) = a^p$ si $a \in \mathcal{O}_X$ et $C^{-1}(dx)$ soit la classe de $x^{p-1} dx$ (de sorte que C^{-1} prolonge F sur \mathcal{O}_X). De plus, si X/k est lisse, C^{-1} est un isomorphisme, appelé isomorphisme de Cartier.*

Démonstration. — Voir [32], Th. 7.2, ou [28]. □

Notons $B\Omega_X^i = d\Omega_X^i$ — les bords — et $Z\Omega^i = \text{Ker } d : \Omega^i \rightarrow \Omega^{i+1}$ — les cycles. Alors, on peut montrer que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 W_n\Omega_X^i & \xrightarrow{F} & W_{n-1}\Omega_X^i \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \Omega_X^i & \xrightarrow{\quad} & \Omega_X^i / B\Omega_X^i \\
 & \searrow \simeq & \uparrow \\
 & C^{-1} & \mathcal{H}^i \Omega_X^\bullet = Z\Omega^i / B\Omega^i
 \end{array}$$

Ainsi, F relève l'isomorphisme de Cartier.

Plus généralement, si l'on définit des sous-faisceaux de $W_n\Omega^i$ en posant $ZW_n\Omega^i = \text{Ker } d$ (cycles) et $BW_n\Omega^i = dW_n\Omega^{i-1}$ (bords), on peut démontrer la proposition suivante :

PROPOSITION 3.4 ([29, III, 1.4]). — *L'image par l'itéré de Frobenius $F^n : W_{2n}\Omega_X^i \rightarrow W_n\Omega_X^i$ est le faisceau des cycles $ZW_n\Omega_X^i$ et l'on a un carré commutatif*

$$\begin{array}{ccc} W_{2n}\Omega_X^i & \xrightarrow{F^n} & ZW_n\Omega_X^i \\ \downarrow & & \downarrow \\ W_n\Omega_X^i & \xrightarrow[\mathbb{C}^{-n}]{\cong} & \mathcal{H}^i W_n\Omega_X^\bullet \end{array}$$

qui définit un isomorphisme de Cartier généralisé \mathbb{C}^{-n} .

4. Comparaison avec la cohomologie cristalline

THÉORÈME 4.1 (Illusie [25, II, 1.4]). — *Si X est un k -schéma lisse, il existe un isomorphisme canonique entre la cohomologie cristalline $H^*(X/W_n)$ et l'hypercohomologie du complexe de de Rham–Witt $\mathbf{H}^*(X, W_n\Omega_X^\bullet)$, compatible à l'action de Frobenius sur la cohomologie cristalline d'une part et sur le complexe de de Rham–Witt via \underline{F} d'autre part.*

Plus généralement, on a pour tout schéma X lisse sur k un isomorphisme

$$Ru_*\mathcal{O}_{X/W_n} \xrightarrow{\sim} W_n\Omega_X^\bullet$$

dans la catégorie dérivée $D(X, W_n)$ des faisceaux en W_n -modules sur X . Cet isomorphisme est fonctoriel en X/k .

Rappelons d'abord que u est l'homomorphisme de Berthelot de projection du topos cristallin sur le topos Zariskien $(X/W_n)_{\text{cris}} \rightarrow X_{\text{zar}}$ (cf. [1, III, 3.2]). Rappelons ensuite le théorème suivant, dû à Berthelot, généralisation du théorème 2.2 :

THÉORÈME 4.2 (Berthelot). — *Soient Z un W_n -schéma lisse et $i : X \hookrightarrow Z$ une immersion fermée. Si $X \rightarrow \tilde{Z}$ est l'enveloppe à puissances divisées de $X \rightarrow Z$, on a, dans la catégorie dérivée $D(X, W_n)$, un isomorphisme*

$$\mathcal{O}_{\tilde{Z}} \otimes \Omega_{Z/W_n}^\bullet \xrightarrow{\sim} Ru_*\mathcal{O}_{X/W_n}.$$

Preuve du théorème 4.1. — Montrons comment définir un homomorphisme

$$Ru_*\mathcal{O}_{X/W_n} \rightarrow W_n\Omega_X^\bullet,$$

ce qui revient à définir une flèche $\mathcal{O}_{\tilde{Z}} \otimes \Omega_{\tilde{Z}/W_n}^\bullet \rightarrow W_n \Omega_X^\bullet$ dans la catégorie dérivée si $X \hookrightarrow Z$ est une immersion fermée de X dans un W_n -schéma lisse Z et si \tilde{Z} désigne l'enveloppe à puissance divisée.

Supposons pour commencer que l'immersion fermée $X \hookrightarrow Z$ se prolonge en une immersion $W_n(X) \hookrightarrow Z$ (c'est vrai localement). On veut alors factoriser $X \rightarrow \tilde{Z}$ par $W_n(X)$ et on peut le faire s'il y a des puissances divisées dans l'idéal $VW_{n-1}(\mathcal{O}_X)$ du morphisme $X \rightarrow W_n(X)$. Or, il existe sur $VW(\mathcal{O}_X)$ une PD-structure canonique : comme $(Vx)^n = p^{n-1}V(x^n)$ pour tout $n \geq 1$, il suffit de définir $\gamma_n(Vx) = \frac{p^{n-1}}{n!}V(x^n)$, ce qui est licite étant donné que $p^{n-1}/n! \in \mathbf{Z}_p$. On a ainsi un morphisme $\mathcal{O}_{\tilde{Z}} \rightarrow W_n(\mathcal{O}_X)$ et par conséquent un morphisme de complexes $\Omega_{\tilde{Z}}^\bullet \rightarrow \Omega_{W_n(\mathcal{O}_X)}^\bullet$. Or, $\mathcal{O}_{\tilde{Z}} \otimes \Omega_{\tilde{Z}/W_n}^\bullet$ est le quotient de $\Omega_{\tilde{Z}/W_n}^\bullet$ par l'idéal différentiel gradué engendré par les relations $d\gamma_k(x) = \gamma_{k-1}(x) dx$. Considérons maintenant le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{\tilde{Z}} \otimes \Omega_{\tilde{Z}/W_n}^\bullet & \longrightarrow & \Omega_{\tilde{Z}}^\bullet / \langle \cdot \cdot \cdot \rangle \longrightarrow \Omega_{W_n(\mathcal{O}_X)}^\bullet / \langle d\gamma_k(Vx) - \gamma_{k-1}(Vx) dx \rangle \\ \simeq \downarrow & & \searrow \quad \quad \quad \downarrow \\ Ru_* \mathcal{O}_{X/W_n} & \xrightarrow{(*)} & W_n \Omega_X^\bullet \end{array}$$

dans $D(X, W_n)$

où la flèche pointillée existe car la flèche $\Omega_{W_n(\mathcal{O}_X)}^\bullet \rightarrow W_n \Omega_X^\bullet$ se factorise par les relations indiquées ; on prend ensuite le quotient pour n fini. Enfin, on montre que la flèche $(*)$ est indépendante des choix, en plongeant X dans un produit.

Pour prouver que c'est un isomorphisme, on peut le vérifier localement. Par localisation étale, on se ramène au cas où

$$X = \text{Spec } A = \text{Spec } \mathbf{F}_p[T_1, \dots, T_n] \quad \text{et} \quad Z = \text{Spec } B = \text{Spec } \mathbf{Z}_p[T_1, \dots, T_N].$$

Comme il y a déjà des puissances divisées dans l'idéal $p\mathbf{Z}_p[T_1, \dots, T_N]$ du noyau de $B \rightarrow A$, on a $\tilde{Z} = Z$. Revenant au complexe des formes entières, il faut vérifier que le morphisme de complexes $\Omega_B^\bullet/p^n \Omega_B^\bullet \rightarrow E_n^\bullet$ est un quasi-isomorphisme. Si $C = \mathbf{Q}_p[T_1, \dots, T_N]$, on a alors une injection $\alpha : \Omega_B^\bullet \hookrightarrow E^\bullet \subset \Omega_{C/\mathbf{Q}_p}^\bullet$ qui permet de trouver $E_{\text{fract}}^\bullet \subset E^\bullet$ tel que $E^\bullet = \Omega_B^\bullet \oplus E_{\text{fract}}^\bullet$. On prouve que E_{fract}^\bullet est homotopiquement trivial ; l'inclusion α induit alors un quasi-isomorphisme $\Omega_B^\bullet/p^n \rightarrow E_n^\bullet = E^\bullet / (V^n + dV^n)$.

Dans le cas général (où $X \rightarrow Z$ ne se factorise pas globalement par $W_n(X)$), considérons un recouvrement ouvert (U_α) de X et des immersions fermées de U_α dans un W_n -schéma lisse Z_α qui se factorisent par $W_n(U_\alpha)$. On pose

$U_0 = \coprod U_\alpha$, $U_1 = U_0 \times_X U_0, \dots$ et $Z_0 = \coprod Z_\alpha$, $Z_1 = \coprod Z_\alpha \times_{W_n} Z_\beta, \dots$. On a ainsi un système simplicial de schémas

$$\begin{array}{ccccc}
 & & W_n(U_\bullet) & \longrightarrow & \tilde{Z}_\bullet \\
 & \nearrow & \downarrow & \swarrow & \\
 U_\bullet & \longrightarrow & Z_\bullet & & \\
 \downarrow \varepsilon & & \downarrow \text{lisse} & & \\
 X & & & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \\
 \text{Spec } k & \longrightarrow & \text{Spec } W_n & &
 \end{array}$$

induisant un isomorphisme

$$\mathcal{O}_{\tilde{Z}_\bullet} \otimes \Omega_{Z_\bullet}^\bullet \rightarrow W_n \Omega_{U_\bullet}^\bullet.$$

Par descente, l'image par $R\varepsilon_*$ du terme de gauche de cet isomorphisme est $Ru_* \mathcal{O}_{X/W_n}$ tandis que celle du terme de droite est $W_n \Omega_X^\bullet$. On montre finalement que l'homomorphisme $Ru_* \mathcal{O}_{X/W_n} \rightarrow W_n \Omega_X^\bullet$ ainsi obtenu est indépendant du choix des $U_\alpha \rightarrow W_n(U_\alpha) \rightarrow Z_\alpha$ faits et l'argument précédent montre que c'est un isomorphisme. \square

COROLLAIRE 4.3. — *Le faisceau abélien $\mathcal{H}^i W_n \Omega_X^\bullet$ est canoniquement isomorphe à $R^i u_* \mathcal{O}_{X/W_n}$, lequel est localement isomorphe à l'hypercohomologie d'un complexe de de Rham $\mathbf{H}^i \Omega_{Z/W_n}^\bullet$ lorsque Z est un relèvement de X sur W_n . En particulier, on dispose d'un isomorphisme σ^n -linéaire $W_n \Omega_X^i \xrightarrow{\sim} R^i u_* \mathcal{O}_{X/W_n}$.*

Remarque 4.4. — Hyodo et Kato ont étendu la théorie du complexe de de Rham–Witt à des situations non lisses où X/k est supposé semi-stable (et plus généralement, logarithmiquement lisse), voir [19] et [20].

Exposé II. PENTES DU FROBENIUS CRISTALLIN

Soit k un corps parfait de caractéristique $p > 0$, $W = W(k)$ et $K = \text{Frac } W$. Notons σ l'automorphisme de Frobenius de W .

1. F-cristaux

Définition 1.1. — Un F-cristal sur k est un W -module libre de type fini M muni d'une application $\varphi : M \rightarrow M$ qui est σ -linéaire injective.

Un morphisme du F-cristal M vers le F-cristal N est une application W -linéaire $u : M \rightarrow N$ telle que $\varphi \circ u = u \circ \varphi$.

Une isogénie est un morphisme de F-cristaux qui induit un isomorphisme de K -espaces vectoriels $M \otimes_W K \rightarrow N \otimes_W K$.

1.1. Exemples

- i) Soit G un groupe p -divisible sur k , $M = \mathbf{D}(G)$ son module de Dieudonné (contravariant). Il est muni d'opérateurs F et V (induits par l'homomorphisme Frobenius $F : G^{(p)} \rightarrow G$ et Verschiebung $V : G \rightarrow G^{(p)}$ par functorialité du module de Dieudonné) vérifiant $FV = VF = p$. On pose alors $\varphi = F$. Le rang de M est $2h$, où h est la hauteur de G .
- ii) Soit X/k propre et lisse de dimension d et $M = H^m(X/W)/\text{torsion}$. Le module M est muni d'une action de Frobenius φ et (M, φ) est un F-cristal. Pour prouver que φ est injectif, on considère la dualité de Poincaré $H^m(X/W) \times H^{2d-m}(X/W) \rightarrow H^{2d}(X/W) \xrightarrow{\text{Tr}} W$ qui est telle que $\langle \varphi x, \varphi y \rangle = p^d \sigma \langle x, y \rangle$.
- iii) Soit $W_\sigma[T]$ l'anneau non-commutatif des polynômes en T avec la relation $T\alpha = \sigma(\alpha)T$ si $\alpha \in W$. Soit $\alpha = r/s \in \mathbf{Q}_+$ un rationnel positif, $r \in \mathbf{N}$ et $s \in \mathbf{N}^*$ étant premiers entre eux. Définissons $M_\alpha = W_\sigma[T]/(T^s - p^r)$ et, si $m \in M_\alpha$, posons $\varphi(m) = Tm$. On constate que φ est σ -linéaire injectif (car si $\varphi(m) = 0$, alors $T^s m = p^r m = 0$, si bien que $m = 0$). On dit que M_α est de *pen*te α .

L'intérêt de ce dernier exemple vient du théorème suivant :

THÉORÈME 1.2 (Dieudonné–Manin, [38]). — i) *Supposons que k est algébriquement clos. Alors, la catégorie des F-cristaux à isogénie près est semi-simple et ses objets simples sont les M_α pour $\alpha \in \mathbf{Q}_+$ définis ci-dessus. Ainsi, tout F-cristal M est isogène à une somme directe $\bigoplus_{\alpha \in \mathbf{Q}_+} M_\alpha^{n_\alpha}$ de F-cristaux de pentes α . Les rationnels α pour lesquels $n_\alpha \neq 0$ sont par définition les *pentés* de M , et l’entier $n_\alpha \dim_{\mathbf{W}}(M_\alpha)$ est la *multiplicité* de la pente α .*

Si k n’est pas algébriquement clos, les pentes de M sont par définition les pentes de $M \otimes_{\mathbf{W}} \mathbf{W}(\bar{k})$.

ii) *Si $k = \mathbf{F}_q$ est fini, $q = p^a$, les pentes de M sont les valuations p -adiques (normalisées par $v(q) = 1$) des valeurs propres de l’endomorphisme \mathbf{W} -linéaire φ^a ; la multiplicité de la pente α est le nombre de valeurs propres de valuation α .*

1.2. Exemples

Reprenons les exemples précédents.

- i) Dans le cas où M est le module de Dieudonné d’un groupe p -divisible G , l’identité $FV = p$ montre que les pentes de M sont dans $[0, 1]$. La filtration d’un groupe p -divisible G dont les quotients successifs sont de type multiplicatif, biconnexe et étale induisent une filtration correspondante sur le module de Dieudonné. La partie étale est de pente nulle, la partie biconnexe de pentes $\in]0, 1[$ et la partie multiplicative de pente 1.
- ii) Si $M = H^m(X/k)/\text{torsion}$, comme $\varphi \circ \varphi^\vee = p^d$, les pentes de M sont dans $[0, d]$. Si X est projectif, le théorème de Lefschetz faible et la dualité de Poincaré permettent de voir que les pentes appartiennent en fait à $[0, m]$ si $0 \leq m \leq d$ et à $[m - d, d]$ si $d \leq m \leq 2d$.

Un F-*isocrystal* sur k est défini en remplaçant « \mathbf{W} -module libre de rang fini » par « \mathbf{K} -espace vectoriel de dimension finie » dans la définition d’un F-cristal. En associant à un F-cristal M l’espace vectoriel $M \otimes_{\mathbf{W}} \mathbf{K}$, muni de $\varphi \otimes 1$, on définit une équivalence de catégories entre F-cristaux (M, φ) sur k à isogénie près et les F-isocristaux (V, φ) sur k qui possèdent un réseau stable par φ . On déduit du théorème de Dieudonné–Manin pour les F-cristaux que la catégorie des F-isocristaux sur un corps algébriquement clos est semi-simple, ses objets

simples étant, pour $\alpha = r/s \in \mathbf{Q}$ (fraction irréductible, $r \in \mathbf{Z}$, $s \in \mathbf{N}^*$), les $V_\alpha = K_\sigma[\mathbf{T}]/(\mathbf{T}^s - p^r)$.

Pour un corps k parfait quelconque, il y a ainsi équivalence de catégories entre F-cristaux à isogénie près sur k et F-isocristaux sur k à pentes ≥ 0 .

Si M est un F-isocristal sur k et I une partie de \mathbf{R} , on notera M_I le plus grand sous F-isocristal de M dont les pentes appartiennent à I . (Par descente, c'est encore un F-isocristal sur k , même si k n'est pas algébriquement clos.)

2. Polygone de Newton et conjecture de Katz

Soit M un F-cristal sur k et $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_i$ les pentes de M ; notons λ_i la multiplicité de la pente α_i et $r = \dim_{\mathbf{W}} M$ le rang de M . On définit alors le polygone de Newton de M comme la fonction continue convexe, affine par morceaux, $Nw_M(t) : [0, r] \rightarrow \mathbf{R}$ telle que $Nw_M(0) = 0$ et dont les pentes soient α_1 pour $0 \leq t \leq \lambda_1$, α_2 pour $\lambda_1 \leq t \leq \lambda_1 + \lambda_2$, etc.

Exemple 2.1. — Soit E une courbe elliptique sur k et $M = H^1(E/W)$ (c'est aussi le module de Dieudonné attaché au groupe p -divisible de E). On a alors deux dessins possibles pour le polygone de Newton (tracé en traits pleins), suivant que E est ordinaire ou supersingulière (voir au paragraphe III.4.7 pour d'autres dessins) :



On définit aussi le polygone de Hodge (parfois qualifié d'« abstrait » pour ne pas le confondre avec celui défini plus bas) $Hdg_M(t)$. Si

$$M/\varphi(M) = \bigoplus_{i \geq 1} (\mathbf{W}/p^i \mathbf{W})^{h_i},$$

posons $h_0 = \dim_{\mathbf{W}} M - \sum h_i$. On dit que les h_i sont les nombres de Hodge de M et le polygone de Hodge est la fonction continue croissante convexe $Hdg_M(t)$ qui vaut 0 en 0, de pente 0 sur $[0, h_0]$, de pente 1 sur $[h_0, h_0 + h_1]$, etc. Dans l'exemple précédent, il est dessiné en traits pointillés.

Remarquons aussi que si, par définition, deux F-cristaux isogènes ont même polygone de Newton, c'est faux pour les polygones de Hodge.

On a alors le fait suivant :

PROPOSITION 2.2 ([31]). — *On a pour tout $t \in [0, \dim_{\mathbb{W}} M]$ l'inégalité*

$$N_{\mathbb{W}M}(t) \geq \text{Hdg}_M(t).$$

Autrement dit, le polygone de Newton est au-dessus du polygone de Hodge.

Soit maintenant X/k un schéma propre et lisse, $M = H^m(X/W)/\text{torsion}$. Posons $\tilde{h}_i = \dim_k H^{m-i}(X, \Omega_{X/k}^i)$, ce qui permet de définir un polygone de Hodge « géométrique » $\widetilde{\text{Hdg}}_M(t)$.

Le théorème suivant avait été conjecturé par Katz.

THÉORÈME 2.3 (Mazur [39, 40], Ogus [4, 8], Nygaard [46]). — *Soit X un k -schéma propre et lisse et notons M le F -cristal $H^m(X/W)/\text{torsion}$.*

- i) *On a l'inégalité $N_{\mathbb{W}M}(t) \geq \widetilde{\text{Hdg}}_M(t)$;*
- ii) *si $H_{\text{cris}}^m(X/W)$ est sans torsion et si la suite spectrale « Hodge vers de Rham » $E_1^{ij} = H^j(X, \Omega_{X/k}^i) \Rightarrow H_{\text{dR}}^{i+j}(X/k)$ dégénère en E_1 , alors il y a égalité entre $\text{Hdg}_M(t)$ et $\widetilde{\text{Hdg}}_M(t)$.*

COROLLAIRE 2.4 (à la Chevalley–Warning). — *Soit $k = \mathbf{F}_q$ et X/k une intersection complète lisse de dimension d dans \mathbf{P}_k^{d+n} . Alors, le nombre de points de $X(\mathbf{F}_{q^s})$ est égal au nombre de points de $\mathbf{P}^d(\mathbf{F}_{q^s})$ modulo q^{cs} où c est le plus petit entier $i \geq 0$ tel que $\dim H^{d-i}(\Omega^i) \neq 0$.*

Démonstration. — Il suffit de traiter le cas $s = 1$.

Il résulte du théorème de Lefschetz faible [34] que la cohomologie cristalline de X est la même que celle de \mathbf{P}^d (en tant que F -cristaux), sauf en degré moitié, c'est-à-dire pour $H^d(X/W)$.

En utilisant la formule des traces de Lefschetz en cohomologie cristalline (cf. I.2.4), on voit alors qu'il suffit de prouver que

$$\frac{\det(1 - F_q | H^d(\mathbf{P}^d/W))}{\det(1 - F_q | H^d(X/W))} \equiv 1 \pmod{q^c}.$$

Or, le numérateur vaut 1 ou $1 - q^{d/2}$ suivant que d est pair ou impair. La symétrie des nombres de Hodge pour les intersections complètes (en fait par dualité de Serre, cf. [18, XI]) entraîne que $c \leq d/2$. Il suffit donc de prouver que $\det(1 - F_q | H^d(X/W))$ est congru à 1 modulo q^c .

Or, par définition de c , les pentes du polygone de Hodge de $H^d(X/W)$ sont supérieures ou égales à c . D'après le théorème de Mazur–Ogus, il en est donc

de même pour les pentes du polygone de Newton de $H^d(X/W)$, si bien que les valeurs propres de F_q agissant (linéairement) sur $H^d(X/W)$ sont de valuations $\geq v(q^c)$, ce qui conclut la preuve du corollaire. \square

Remarque 2.5. — On trouve dans [18, XI, 2.5.8] la formule suivante pour le niveau de Hodge c : notons (a_1, \dots, a_n) le multidegré de l'intersection complète X dans \mathbf{P}^{n+d} , avec $a_1 \leq \dots \leq a_n$. Alors, c est le maximum de 0 et de

$$\min \left(\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{d+1 - \sum_{i \neq n} (a_i - 1)}{a_n} \right\rfloor \right).$$

Dans le cas d'une hypersurface lisse de degré d dans \mathbf{P}^n , $a_1 = d$ et on obtient que le nombre de points sur \mathbf{F}_q d'une hypersurface lisse de dimension n et de degré d est congru à $\#\mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{F}_q)$ modulo $q^{\lfloor n/d \rfloor}$. En particulier, une hypersurface lisse de degré $d \leq n$ dans \mathbf{P}^n a un point rationnel (théorème de Chevalley–Warning [56]).

3. Lien avec de Rham–Witt

De l'isomorphisme $H^m(X/W) \simeq \mathbf{H}^m(X, W\Omega^\bullet)$ résulte une suite spectrale, dite *suite spectrale des pentes* :

$$E_1^{ij} = H^j(X, W\Omega^i) \Rightarrow H^{i+j}(X/W),$$

qui est Frobenius équivariante si l'on fait agir le Frobenius par φ sur $H^m(X/W)$ et par $\underline{F} = p^i F$ sur $H^j(X, W\Omega^i)$.

THÉORÈME 3.1 (Bloch [5], Illusie [25]). — *La suite spectrale des pentes dégénère en E_1 modulo torsion et fournit des isomorphismes de F-isocristaux*

$$(H^j(X, W\Omega^i) \otimes_W K, p^i F) \xrightarrow{\sim} (H^{i+j}(X/W) \otimes_W K)_{[i, i+1[}.$$

Idée de la preuve. — Tout d'abord, on prouve que les groupes de cohomologie de de Rham–Witt $H^j(X, W\Omega^i) \otimes_W K$ sont des K -espaces vectoriels de dimension finie (voir [25]).

On regarde ensuite les pentes des termes E_1 . Comme $FV = VF = p$, les pentes de l'isocristal $(H^j(X, W\Omega^i) \otimes_W K, p^i F)$ sont dans $[i, i+1[$. Comme V est topologiquement nilpotent, elles sont en fait dans $[i, i+1[$. Alors, $d_1^{ij} \otimes 1$ envoie un F-isocristal de pentes $[i, i+1[$ dans un F-isocristal de pentes $[i+1, i+2[$,

si bien que d_1^{ij} est nul modulo torsion. De même, toutes les différentielles supérieures d_r^{ij} sont nulles modulo torsion. Autrement dit, la suite spectrale des pentes dégénère en E_1 modulo torsion. \square

En particulier, la cohomologie de Serre $H^j(X, W\mathcal{O}_X)$ s'identifie modulo torsion au plus grand sous-F-cristal $H^j(X/W)_{[0,1[}$ de $H^j(X/W)$ dont les pentes sont dans $[0, 1[$.

De même, les suites exactes d'Artin–Schreier pour tout n

$$0 \rightarrow \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z} \rightarrow W_n\mathcal{O}_X \xrightarrow{1-F} W_n\mathcal{O}_X \rightarrow 0$$

induisent, après passage à la limite, une suite exacte en cohomologie étale

$$0 \rightarrow H_{\text{ét}}^m(X, \mathbf{Z}_p) \rightarrow H^m(X/W) \xrightarrow{1-F} H^m(X/W) \rightarrow 0$$

qui identifie $H_{\text{ét}}^m(X, \mathbf{Z}_p)$ au plus grand sous-F-cristal de $H^m(X/W)$ où F est un isomorphisme.

En degrés plus grand, on a le résultat suivant :

THÉORÈME 3.2 (Illusie, [25, I, 5.7.2]). — *Soient n et i deux entiers ≥ 1 et $d\log : \mathcal{O}_X^\times \rightarrow W_n\Omega_X^1$ défini par $x \mapsto d[x]/[x]$. Soit $W_n\Omega_{X,\log}^i$ le sous faisceau (pour la topologie étale) de $W_n\Omega_X^i$ engendré localement par les $d\log x_1 \wedge \cdots \wedge d\log x_i$. On a alors une suite exacte*

$$0 \rightarrow W_n\Omega_{X,\log}^i \rightarrow W_n\Omega_X^i \xrightarrow{1-F} W_n\Omega_X^i \rightarrow 0.$$

Ces résultats ont de nombreuses applications : étude des parties de pentes entières, cf. [6], [29] et le paragraphe III.3, classes de Chern [14, 13], théorème de Riemann–Roch en cohomologie cristalline [13], inégalité d'Igusa–Artin–Mazur [25, II, 5B], dualité plate de Milne [3], etc.

Exposé III. DÉCOMPOSITIONS DE HODGE-WITT, VARIÉTÉS ORDINAIRES

Soit k un corps parfait de caractéristique $p > 0$. On note $W_n = W_n(k)$ l'anneau des vecteurs de Witt de longueur n sur k , $W = W(k)$, $K = \text{Frac } W$ le corps des fractions de W .

Soit X un schéma propre et lisse sur k .

1. Suite spectrale conjuguée

1.1. Définition

On a vu que l'on disposait pour tout entier $n \geq 1$ d'un complexe de de Rham–Witt $W_n\Omega_X^\bullet$ dont l'hypercohomologie $\mathbf{H}^*(W_n\Omega_X^\bullet)$ s'identifie canoniquement à la cohomologie cristalline $H^*(X/W_n)$. La *suite spectrale conjuguée* de cran n est par définition la seconde suite spectrale d'hypercohomologie

$$(\text{Conj}_n) \quad E_2^{ij} = H^i(X, \mathcal{H}^j W_n\Omega_X^\bullet) \Rightarrow \mathbf{H}^{i+j}(X, W_n\Omega_X^\bullet) \stackrel{\text{can}}{\simeq} H^{i+j}(X/W_n).$$

Les applications de restriction $W_{n+1}\Omega_X^\bullet \rightarrow W_n\Omega_X^\bullet$ permettent de construire un système projectif de suites spectrales. Comme les $H^i(X, \mathcal{H}^j W_n\Omega_X^\bullet)$ sont des W_n modules de longueur finie, la limite projective est encore une suite spectrale

$$(\text{Conj}) \quad \lim_{\leftarrow n} H^i(X, \mathcal{H}^j W_n\Omega_X^\bullet) \Rightarrow \lim_{\leftarrow n} H^{i+j}(X/W_n) = H^{i+j}(X/W).$$

Par définition, on posera

$$H^i(X, \mathcal{H}^j W\Omega_X^\bullet) = \lim_{\leftarrow n} H^i(X, \mathcal{H}^j W_n\Omega_X^\bullet),$$

en prenant garde au fait que le membre de gauche *n'est pas* le i^{e} groupe de cohomologie du faisceau $\mathcal{H}^j W\Omega_X^\bullet$.

Remarque 1.1. — Si $u : (X/W_n)_{\text{cris}} \rightarrow X_{\text{zar}}$ est la projection du topos cristallin de X/W_n vers le topos zariskien, on sait que $\mathcal{H}^j W_n\Omega_X^\bullet = R^j u_* \mathcal{O}_{X/W_n}$, si bien que la suite spectrale conjuguée s'interprète uniquement en termes de cohomologie cristalline : c'est la suite spectrale de Leray de u .

1.2. Dégénérescence modulo torsion

Dans l'étude de la suite spectrale des pentes, la dégénérescence modulo torsion résultait de la conjonction d'un théorème de finitude et de la considération des pentes de Frobenius sur les F-cristaux formés par le terme initial. Nous allons faire de même pour étudier la suite spectrale conjuguée.

En imposant que commute le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc}
 W_{n+1}\Omega_X^i & \xrightarrow{\text{Res}} & W_n\Omega_X^i & \xrightarrow{p} & W_{n+1}\Omega_X^i & \xrightarrow{F} & W_n\Omega_X^i \\
 \downarrow C^{-n-1} & & \downarrow C^{-n} & & & & \downarrow C^{-n} \\
 \mathcal{H}^i W_{n+1}\Omega_X^\bullet & \xrightarrow{V'} & \mathcal{H}^i W_n\Omega_X^\bullet & \xrightarrow{F'} & & & \mathcal{H}^i W_n\Omega_X^\bullet
 \end{array}$$

(dans lequel les flèches verticales sont les isomorphismes de Cartier itérés), on définit deux opérateurs F' et V' tels que $F'V' = V'F'$ soit la multiplication par $p : \mathcal{H}^i W_{n+1}\Omega^\bullet \rightarrow \mathcal{H}^i W_n\Omega^\bullet$. Remarquons que F' est topologiquement nilpotent et que $\underline{F} = p^{i-1}F'$ sur le pro-objet (ou sa limite) $\mathcal{H}^i W_\bullet\Omega_X^\bullet$.

THÉORÈME 1.2 (Illusie–Raynaud, [29, III, 2.2]). — *Les $H^i(X, \mathcal{H}^j W\Omega_X^\bullet) \otimes_{\mathbb{W}} K$ sont des K -espaces vectoriels de dimension finie et la suite spectrale conjuguée $(\text{Conj}) \otimes K$ dégénère en E_2 en définissant un isomorphisme de F-isocristaux*

$$H^i(X, \mathcal{H}^j W\Omega_X^\bullet) \otimes_{\mathbb{W}} K \xrightarrow{\sim} [H^{i+j}(X/W) \otimes_{\mathbb{W}} K]_{[j-1, j]}$$

(via l'opérateur \underline{F} sur $H^i(\mathcal{H}^j)$ et l'endomorphisme de Frobenius usuel sur la cohomologie cristalline).

Démonstration. — Admettons la finitude. Cela permet de considérer les termes de la suite spectrale comme des isocristaux via \underline{F} .

La relation $\underline{F} = p^{j-1}F'$ sur $\mathcal{H}^j W\Omega_X^\bullet$, jointe au fait que F' est topologiquement nilpotent, montre que les pentes de \underline{F} sur $H^i(X, \mathcal{H}^j W\Omega_X^\bullet)$ sont dans $]j-1, j]$, et de même sur le terme E_r^{ij} de la suite spectrale. Alors, pour $r \geq 2$, la différentielle $d_r^{ij} \otimes 1$ envoie l'isocristal E_r^{ij} de pentes $\in]j-1, j]$ dans $E_{r+1}^{i+r, j-r+1}$ dont les pentes sont dans $]j-r, j+1-r]$. Ces isocristaux n'ayant pas de pentes communes, $d_r = 0$ pour tout $r \geq 2$, d'où la dégénérescence modulo torsion de la suite spectrale, ainsi que l'isomorphisme annoncé. \square

Sans négliger la torsion, on peut étudier les termes initiaux $E_r^{i, j}$ de la suite spectrale conjuguée (Conj) pour $j = 0$ et montrer ainsi des résultats partiels :

PROPOSITION 1.3 ([29, III, 6.8]). — *Le groupe $H^i(X, \mathcal{H}^0 W\Omega_X^\bullet)$ est de type fini sur W et s'injecte dans $H^i(X/W)$. Son image est le plus grand sous F -module de $H^i(X/W)$ où Frobenius est inversible (« F -cristal unité », unit root F -crystal en anglais).*

Si k est algébriquement clos, l'injection $\mathbf{Z}/p^\bullet \hookrightarrow \mathcal{H}^0 W_\bullet \Omega_X^\bullet$ induit un isomorphisme

$$H_{\text{ét}}^i(X, \mathbf{Z}_p) \otimes W \xrightarrow{\sim} H^i(X, \mathcal{H}^0 W\Omega^\bullet).$$

2. Décomposition de Hodge–Witt

2.1. Cohomologie des cycles et des bords

Rappelons que le faisceau des *cycles* $ZW_n\Omega_X^i$ est le noyau de $d : W_n\Omega_X^i \rightarrow W_n\Omega_X^{i+1}$; le faisceau des *bords* est défini par $BW_n\Omega_X^i = dW_n\Omega_X^{i-1}$. Alors, les groupes de cohomologie $H^j(X, ZW_n\Omega_X^i)$ (resp. $H^j(X, BW_n\Omega_X^i)$) sont des W_n -modules de longueur finie et on pose

$$\begin{aligned} H^j(X, ZW\Omega_X^i) &= \varprojlim_n H^j(X, ZW_n\Omega_X^i), \\ \text{resp. } H^j(X, BW\Omega_X^i) &= \varprojlim_n H^j(X, BW_n\Omega_X^i). \end{aligned}$$

PROPOSITION 2.1 ([29, IV, 1.5]). — *L'injection de complexes $ZW_n\Omega_X^i[-i] \hookrightarrow W_n\Omega_X^\bullet$ induit une application canonique $H^j(ZW\Omega_X^i) \rightarrow H^{i+j}(X/W)$. L'image de $H^j(ZW\Omega_X^i) \otimes_W K$ par cette application est la partie de pente i du F -isocristal $H^{i+j}(X/W) \otimes_W K$.*

« *Preuve* ». — On a vu dans la proposition 1.3.4 que $ZW_n\Omega_X^i$ est l'image de $W\Omega_X^i$ par la composition de $F^n : W_\bullet\Omega_X^i \rightarrow W_\bullet\Omega_X^i$ et de la projection sur $W_n\Omega_X^i$. On en déduit que le pro-objet $ZW_\bullet\Omega_X^i$ s'identifie à la limite projective suivant F des pro-objets $W_\bullet\Omega_X^i$. L'injection de complexes de l'énoncé induit ainsi un isomorphisme

$$H^j(X, ZW\Omega_X^i) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_F H^j(X, W\Omega_X^i).$$

Après tensorisation par K , le membre de droite est un F -isocristal (via F) unité (car F est alors un isomorphisme). Dans l'identification de $H^j(X, W\Omega_X^i) \otimes K$ avec la cohomologie cristalline, Frobenius agit via $\underline{F} = p^i F$, ce qui achève de prouver que $H^j(ZW\Omega_X^i) \otimes K$ est canoniquement isomorphe à la partie de pente i dans $H^{i+j}(X/W).A$ \square

On a une suite exacte de pro-objets

$$0 \rightarrow \mathrm{BW}_\bullet \Omega_X^i \rightarrow \mathrm{ZW}_\bullet \Omega_X^i \rightarrow \mathcal{H}^i \mathrm{W}_\bullet \Omega_X^\bullet \rightarrow 0 ;$$

jointe à l'énoncé de dégénérescence modulo torsion de la suite spectrale conjuguée, elle implique

PROPOSITION 2.2. — *La suite exacte longue de cohomologie associée à cette dernière suite exacte induit un isomorphisme d'isocristaux*

$$[\mathrm{H}^{i+j-1}(X/W) \otimes_{\mathrm{W}} \mathrm{K}]_{]i-1, i[} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^j(\mathrm{BW} \Omega_X^i) \otimes_{\mathrm{W}} \mathrm{K} .$$

2.2. Décomposition de Hodge–Witt

Dans tout ce qui précède, nous avons négligé la torsion de la cohomologie du complexe de de Rham–Witt; cette torsion n'est pas toujours de type fini. On a cependant la proposition suivante :

PROPOSITION 2.3. — *Les conditions (i) à (iv) suivantes sont équivalentes :*

- (i) $\mathrm{H}^j(\mathrm{ZW} \Omega_X^i)$ est de type fini sur W pour tout i et tout j ;
- (ii) $\mathrm{H}^j(\mathrm{BW} \Omega_X^i)$ est de type fini sur W pour tout i et tout j ;
- (iii) $\mathrm{H}^j(\mathrm{W} \Omega_X^i)$ est de type fini sur W pour tout i et tout j ;
- (iv) $\mathrm{H}^j(\mathcal{H}^i \mathrm{W} \Omega_X^\bullet)$ est de type fini sur W pour tout i et tout j .

Définition 2.4. — Si les conditions précédentes sont satisfaites, on dit que X est de *Hodge–Witt*.

THÉORÈME 2.5 ([29, IV, 4.5]). — *X est de Hodge–Witt si et seulement si la suite spectrale des pentes (resp. la suite spectrale conjuguée) dégénère en E_1 (resp. en E_2). En notant $\mathrm{H}_{[i]}^n = \mathrm{H}^{n-i}(\mathrm{ZW} \Omega_X^i)$ et $\mathrm{H}_{]i, i+1[}^n = \mathrm{H}^{n-i}(\mathrm{BW} \Omega_X^{i+1})$, on a dans ce cas des décompositions canoniques :*

$$\begin{aligned} \mathrm{H}^n(X/W) &= \bigoplus_{i \geq 0} \mathrm{H}_{[i]}^n \oplus \mathrm{H}_{]i, i+1[}^n, \\ \mathrm{H}^{n-i}(\mathrm{W} \Omega_X^i) &= \mathrm{H}_{[i]}^n \oplus \mathrm{H}_{]i, i+1[}^n \\ \text{et } \mathrm{H}^{n-i}(X, \mathcal{H}^i \mathrm{W} \Omega_X^\bullet) &= \mathrm{H}_{]i-1, i[}^n \oplus \mathrm{H}_{[i]}^n. \end{aligned}$$

Remarque 2.6. — Notons que si $\mathrm{H}^j(\mathrm{W} \Omega_X^i)$ est sans torsion, alors il est de type fini. En particulier, X est de Hodge–Witt et $\mathrm{H}^*(X/W)$ est sans torsion si et seulement si $\mathrm{H}^j(\mathrm{W} \Omega_X^i)$ est sans torsion pour tout i et tout j .

On peut donner des résultats plus précis en termes des *filtrations* que les deux suites spectrales induisent sur la cohomologie cristalline. En effet, on a une filtration décroissante (aboutissement de la suite spectrale des pentes)

$$P^i H^{i+j}(X/W) = \varprojlim_n \operatorname{Im} \left(H^{i+j}(X, W_n \Omega_X^{\geq i}) \rightarrow H^{i+j}(X/W) \right)$$

et une filtration croissante (aboutissement de la suite spectrale conjuguée)

$$P_i H^{i+j}(X/W) = \varprojlim_n \operatorname{Im} \left(H^{i+j}(X, t_{\leq i} W_n \Omega_X^\bullet) \rightarrow H^{i+j}(X/W) \right).$$

Si X est de Hodge–Witt, on a ainsi une décomposition

$$H^n(X/W) = P_i H^n(X/W) \oplus P^{i+1} H^n(X/W) \oplus H^n_{[i, i+1[},$$

ce qu'on traduit en disant que les deux filtrations P^\bullet et P_\bullet sont « presque opposées ». On remarquera que sur \mathbf{C} , les deux filtrations analogues sur la cohomologie de de Rham d'une variété projective lisse provenant des deux suites spectrales d'hypercohomologie de Hodge vers de Rham sont opposées.

3. Variétés ordinaires

Définition 3.1. — On dit qu'un k -schéma propre et lisse X est *ordinaire* si la cohomologie des bords est nulle en tout degré, i.e. si $H^j(X, B\Omega_X^i) = 0$ pour tous i et j .

Le théorème suivant est dû à Bloch–Kato [6, 7.3] et Illusie–Raynaud [29, IV, 4.13]. Avant de l'énoncer, rappelons que $W_n \Omega_{X, \log}^i$ est le sous-faisceau de $W_n \Omega_X^i$ engendré localement pour la topologie étale sur X par les sections de la forme $\frac{d[x_1]}{[x_1]} \wedge \cdots \wedge \frac{d[x_i]}{[x_i]}$ pour $x_1, \dots, x_i \in \mathcal{O}_X^*$ et $[x] = (x, 0, \dots)$ le relèvement de Teichmüller de x dans $W_n \mathcal{O}_X$. (Pour $n = 1$, on obtient le faisceau $\Omega_{X, \log}^i$ engendré par les différentielles logarithmiques dx/x usuelles.)

THÉORÈME 3.2. — *Soit X un schéma propre et lisse sur un corps algébriquement clos k . Les sept propositions suivantes sont équivalentes :*

- i) X est ordinaire ;
- ii) $H^j(BW_n \Omega_X^i) = 0$ pour tous i, j et pour tout $n \geq 1$;
- iii) $H^j(BW \Omega_X^i) = 0$ pour tous i et j ;
- iv) F agit par automorphisme sur $H^j(X, W \Omega_X^i)$ pour tous i, j ;

- v) la flèche naturelle $H^j(X, \Omega_{X, \log}^i) \otimes_{\mathbf{F}_p} k \rightarrow H^j(X, \Omega_X^i)$ est un isomorphisme pour tous i et j ;
- vi) la flèche naturelle $H^j(X, W\Omega_{X, \log}^i) \otimes_{\mathbf{Z}_p} W(k) \rightarrow H^j(X, W\Omega_X^i)$ est un isomorphisme pour tous i et j ;
- vii) les deux suites spectrales d'hypercohomologie de Hodge vers de Rham dégénèrent en E_1 (resp. E_2) et les deux filtrations ainsi obtenues sur $H_{\text{dR}}^*(X/k)$ sont opposées.

Si la cohomologie cristalline $H^*(X/W)$ de X est sans torsion, alors X est ordinaire si et seulement si pour tout entier n , le polygone de Newton du F -cristal $H^n(X/W)$ est égal au polygone de Hodge géométrique de $H^n(X/W)$.

Enfin, si $H^j(X, W\Omega_X^i)$ est sans torsion pour tous i et j , X est ordinaire si et seulement si les pentes de Frobenius sur $H^n(X/W)$ sont entières.

Éléments de preuve. — Nous ne démontrerons pas tout ce théorème dont une grande partie est constituée de dévissages subtils.

Montrons toutefois que (i) implique (v). La suite exacte longue de cohomologie que l'on déduit de la suite exacte $0 \rightarrow B\Omega_X^i \rightarrow \Omega_X^i \rightarrow \Omega_X^i/B\Omega_X^i \rightarrow 0$ montre que la projection $\Omega_X^i \rightarrow \Omega_X^i/B\Omega_X^i$ induit un isomorphisme en cohomologie pour tout i . D'autre part, considérons la suite exacte de faisceaux pour la topologie étale :

$$0 \rightarrow \Omega_{X, \log}^i \rightarrow \Omega_X^i \xrightarrow{1-C^{-1}} \Omega_X^i/B\Omega_X^i \rightarrow 0 ;$$

en cohomologie étale, on obtient une application $H^j(\Omega_X^i) \rightarrow H^j(\Omega_X^i/B\Omega_X^i) \simeq H^j(\Omega_X^i)$ de la forme $\text{Id} - C^{-1}$ où C^{-1} est p -linéaire. Le lemme 3.3 d'algèbre p -linéaire implique que cette application est surjective. Par suite, on a des suites exactes pour tout i et tout j

$$0 \rightarrow H^j(\Omega_{X, \log}^i) \rightarrow H^j(\Omega_X^i) \xrightarrow{1-C^{-1}} H^j(\Omega_X^i/B\Omega_X^i) \rightarrow 0,$$

et le lemme d'algèbre p -linéaire nous dit que l'application naturelle $k \otimes_{\mathbf{F}_p} H^j(\Omega_{X, \log}^i) \hookrightarrow H^j(\Omega_X^i)$ est bien une injection.

Toujours d'après l'algèbre p -linéaire cette application sera surjective si $C^{-1} : H^j(\Omega_X^i) \rightarrow H^j(\Omega_X^i/B\Omega_X^i)$ est surjective. Comme l'homomorphisme de Cartier C^{-1} induit un isomorphisme $\Omega_X^i \rightarrow Z\Omega_X^i/B\Omega_X^i$, il reste à prouver que l'application naturelle $Z\Omega_X^i/B\Omega_X^i \rightarrow \Omega_X^i/B\Omega_X^i$ est un isomorphisme en cohomologie. Or, pour tout j , $H^j(\Omega_X^i/Z\Omega_X^i) = 0$ du fait de la nullité en tout degré de la cohomologie des bords. On a ainsi montré que (i) impliquait (v).

Pour démontrer (vi) à partir de (v), on commence par prouver à l'aide de dévissages le résultat analogue pour $H^j(X, W_n \Omega_{X, \log}^i)$ puis on prend la limite projective sur n .

Montrons que (vi) implique (iv) : la condition (vi) et la suite exacte de pro-objets $0 \rightarrow W_\bullet \Omega_{X, \log}^i \rightarrow W_\bullet \Omega_X^i \xrightarrow{1-F} W_\bullet \Omega_X^i \rightarrow 0$, joints au lemme d'algèbre p -linéaire impliquent en effet que $H^j(W \Omega_{X, \log}^i) \otimes_{\mathbf{Z}_p} k \simeq H^j(W \Omega_X^i)^{F=1}$, d'où (iv). \square

Dans l'ébauche de preuve du théorème précédent, nous avons fait usage du lemme (classique) d'algèbre p -linéaire suivant :

LEMME 3.3. — *Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$ et M un k -espace vectoriel de dimension finie. Soit $F : M \rightarrow M$ un application additive, p -linéaire (i.e. $F(am) = a^p F(m)$).*

Les sous-espaces vectoriels $M_{ss} = \bigcap_n \text{Im } F^n$ et $M_{nil} = \bigcup_n \text{Ker } F^n$ sont tels que $M = M_{ss} \oplus M_{nil}$; ils sont de plus stables par F , F étant bijectif sur M_{ss} et nilpotent sur M_{nil} .

Enfin, l'application naturelle $M^{F=1} \otimes_{\mathbf{F}_p} k \rightarrow M$ est injective d'image M_{ss} et $1 - F : M \rightarrow M$ est surjective.

Démonstration. — Il est clair à partir des formules que M_{ss} et M_{nil} sont stables par F , que F est surjectif sur le premier et nilpotent sur le second. En « linéarisant » F , on voit qu'il est bijectif sur M_{ss} . En particulier, l'application naturelle $M_{ss} \oplus M_{nil} \rightarrow M$ est injective.

Pour prouver la surjectivité, on utilise en général la surjectivité de *l'isogénie de Lang* (cf. [54]). La preuve que nous donnons ici est plus élémentaire. Remarquons qu'il existe un entier n tel que $\text{Im } F^n = M_{ss}$ et $\text{Ker } F^n = M_{nil}$; si $m \in M$, posons m_{ss} l'unique élément de M_{ss} tel que $F^n(m) = F^n(m_{ss})$ et $m_{nil} = m - m_{ss}$. On a ainsi $F^n(m_{nil}) = 0$, si bien que $m_{nil} \in M_{nil}$.

L'application naturelle $M^{F=1} \otimes_{\mathbf{F}_p} k \rightarrow M$ est injective. En effet, si $Fm_i = m_i$ et que l'on a une écriture minimale $\sum \alpha_i m_i = 0$ pour des $\alpha_i \in k^\times$ et $\alpha_{i_0} = 1$. on obtient en appliquant F et en combinant les deux équations, l'égalité $\sum_{i \neq i_0} (\alpha_i - \alpha_i^p) m_i = 0$ d'où il vient que $\alpha_i \in \mathbf{F}_p$ et par conséquent $\sum \alpha_i m_i = 0$ dans $M^{F=1} \otimes_{\mathbf{F}_p} k$.

Son image N est un sous k -espace vectoriel de M engendré par des éléments de M_{ss} , donc est incluse dans M_{ss} . Montrons que $N = M_{ss}$; comme N est stable par F , on peut considérer $F : M/N \rightarrow M/N$, ce qui nous ramène à

prouver que $M^{F=1} \neq 0$ si $M_{\text{ss}} \neq 0$. Après avoir quotienté par M_{nil} , la situation est $F : M \rightarrow M$ bijectif tel que $M^{F=1} = 0$ et on doit prouver que $M = 0$.

Or, si $M \neq 0$, il existe une relation de dépendance linéaire de longueur minimale pour m décrivant $M \setminus \{0\}$.

$$m + a_1 F(m) + \cdots + a_n F^n(m).$$

Si $n = 1$, en choisissant $\lambda \in k$ tel que $\lambda^p = -a_1$, on voit que $F(\lambda m) = \lambda m$, ce qui contredit l'hypothèse que $M^{F=1} = 0$. Si $n > 1$, on va trouver une relation de dépendance linéaire plus courte. En effet, on peut trouver $a, b_1, \dots, b_{n-1} \in k$ tels que

$$\begin{aligned} (m + b_1 F(m) + \cdots + b_{n-1} F^{n-1}(m)) \\ + a F(m + b_1 F(m) + \cdots + b_{n-1} F^{n-1}(m)) = 0. \end{aligned}$$

En effet, cela revient à résoudre le système d'équations

$$b_1 + a = a_1, \quad b_2 + ab_1^p = a_2, \quad \dots \quad b_{n-1} + ab_{n-2}^p = a_{n-1}, \quad ab_{n-1}^p = a_n,$$

dans lequel tous les b_i s'éliminent en une équation non triviale en a . Comme $M^{F=1} = 0$, l'argument du cas $n = 1$ montre que

$$m + b_1 F(m) + \cdots + b_{n-1} F^{n-1}(m) = 0,$$

contrairement au fait que n est minimal. En définitive, $M = N$ et $M^{F=1} \otimes_{\mathbf{F}_p} k \rightarrow M_{\text{ss}}$ est un isomorphisme.

Pour prouver enfin que $1 - F$ est surjectif, il suffit par linéarité de le faire sur chacune des deux composantes M_{ss} et M_{nil} . Sur M_{ss} , c'est clair car l'isomorphisme précédent ramène ce problème à une série d'équations d'Artin-Schreier. Sur M_{nil} , on peut écrire $(1 - F)^{-1} = 1 + F + \cdots + F^n$, si $F^{n+1} = 0$, d'où la surjectivité dans ce cas. \square

4. Exemples de variétés ordinaires

Soit k un corps parfait de caractéristique $p > 0$.

4.1. Fibrés projectifs

Soit X propre et lisse sur k . Si E est un fibré vectoriel sur X , alors $\mathbf{P}(E)$ est ordinaire si et seulement si X est ordinaire. En particulier, l'espace projectif standard est ordinaire.

4.2. Éclatements

Soient X propre et lisse sur k et $Y \hookrightarrow X$ une sous-variété lisse, purement de codimension ≥ 2 . Si \tilde{X} est l'éclaté de Y dans X , \tilde{X} est ordinaire si et seulement si X et Y sont ordinaires.

Ces deux résultats se démontrent en calculant par exemple la cohomologie des bords de $\mathbf{P}(E)$ (resp. de \tilde{X}) à partir des cohomologies de X (resp. de X et Y), cf. [27] pour les détails.

4.3. Variétés abéliennes

On suppose que k est algébriquement clos.

PROPOSITION 4.1. — *Soit X une variété abélienne de dimension g sur k . Alors, X est ordinaire si et seulement si elle est ordinaire au sens usuel, c'est-à-dire si l'ensemble des points de $X(k)$ annulés par p est de cardinal p^g .*

Rappelons qu'en général le cardinal du sous-groupe $X[p]$ de p -torsion de $X(k)$ est de la forme p^f , où l'entier f , appelé p -rang de X est compris entre 0 et g , tandis que le cardinal de l'ensemble des points de $X(k)$ annulés par un entier n premier à p est égal à n^{2g} .

Démonstration. — (Cf. [6, 7.4] pour une autre preuve qui utilise les faisceaux de formes différentielles logarithmiques.) Comme la cohomologie cristalline d'une variété abélienne est d'une part sans torsion, d'autre part l'algèbre extérieure sur $H^1(X/W)$ (cf. par exemple [41]), il suffit de montrer que $f = g$ si et seulement si les polygones de Newton et de Hodge du F -cristal $H^1(X/W)$ coïncident.

Alors, X est ordinaire si et seulement si F est un isomorphisme sur $H^1(X, \mathcal{O}_X)$; grâce à la proposition suivante, cette condition est équivalente à

$$\dim_{\mathbf{F}_p} H^1(X, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) = g.$$

Or, la dimension de $H^1(X, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ est le p -rang de la variété abélienne duale de X , qui a même p -rang que X (cf. [45, p. 147]). \square

PROPOSITION 4.2 (Serre). — *Soit X un schéma intègre et propre sur un corps k algébriquement clos de caractéristique p . Alors,*

$$H^1(X, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} H^1(X, \mathcal{O}_X)^{F=1}.$$

Démonstration. — On utilise la suite exacte d'Artin–Schreier

$$0 \rightarrow \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{G}_a \xrightarrow{F-1} \mathbf{G}_a \rightarrow 0,$$

où $(F-1)(x) = x^p - x$. La suite exacte longue de cohomologie étale s'écrit, compte tenu de la comparaison $H^*(X, \mathbf{G}_a) = H^*(X, \mathcal{O}_X)$,

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^0(X, \mathbf{Z}/p) & \longrightarrow & H^0(X, \mathcal{O}_X) & \xrightarrow{F-1} & H^0(X, \mathcal{O}_X) \\ & & & & & \swarrow & \\ & & H^1(X, \mathbf{Z}/p) & \longrightarrow & H^1(X, \mathcal{O}_X) & \longrightarrow & H^1(X, \mathcal{O}_X) \end{array}$$

Comme X est intègre et propre, le début de cette suite exacte est $0 \rightarrow \mathbf{Z}/p \rightarrow k \xrightarrow{F-1} k$, et la dernière flèche est surjective puisque k est algébriquement clos, si bien que l'on a une suite exacte

$$0 \rightarrow H^1(X, \mathbf{Z}/p) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{F-1} H^1(X, \mathcal{O}_X);$$

la proposition est ainsi démontrée. \square

4.4. Courbes

Une courbe X projective et lisse sur k est ordinaire si et seulement si sa jacobienne est ordinaire. On peut supposer que k est algébriquement clos; on dispose alors d'un plongement $X \hookrightarrow J$, où J est la jacobienne de X et ce plongement est tel que l'application $H^1(J, \mathcal{O}_J) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X)$ qui en résulte par fonctorialité est un isomorphisme. Ainsi, $H^1(\mathcal{O}_J)^{F=1}$ et $H^1(\mathcal{O}_X)^{F=1}$ ont même dimension sur \mathbf{F}_p . D'autre part, on déduit du théorème de Bloch–Kato, Illusie–Raynaud que X est ordinaire si et seulement si F est un automorphisme sur $H^1(X, \mathcal{O}_X)$, si bien que X est ordinaire si et seulement si J l'est.

4.5. Courbes elliptiques

Soit X une courbe elliptique sur k , supposé algébriquement clos. Si $p = 2$, seule la courbe d'équation $y^2 + y = x^3$ n'est pas ordinaire. Si $p \geq 3$, choisissons une équation pour X de la forme $y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$. Notons Q le point $(0, 0)$; les ouverts affines $U_0 = X \setminus \{0\}$ et $U_1 = X \setminus \{Q\}$ donnent une résolution de Čech du faisceau \mathcal{O}_X qui permet de calculer $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ par la formule

$$H^1(X, \mathcal{O}_X) = \Gamma(U_0 \cap U_1, \mathcal{O}_X) / \{f - g; f \in \Gamma(U_0, \mathcal{O}_X), g \in \Gamma(U_1, \mathcal{O}_X)\}.$$

Si $\omega = dx/y$ est la forme différentielle invariante sur X , l'application qui associe à $f \in \Gamma(U_0 \cap U_1, \mathcal{O}_X)$ le résidu en Q de la forme différentielle $f\omega$ définit un isomorphisme $H^1(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{\sim} k$. De plus, on constate que $f = y/x$ induit un élément η , non nul de $H^1(X, \mathcal{O}_X)$. Alors, $F^*(\eta)$ est induit par y^p/x^p et l'on a

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_Q \left(\frac{y^p dx}{x^p y} \right) &= \operatorname{Res}_Q \left(\frac{(x(x-1)(x-\lambda))^{(p-1)/2} dx}{x^{p-1} x} \right) \\ &= 2 \times \text{coeff. de } x^{p-1} \text{ dans } (x(x-1)(x-\lambda))^{(p-1)/2} \\ &= 2 \sum_{k=0}^{(p-1)/2} \binom{(p-1)/2}{k} \lambda^k = 2\Phi_p(\lambda). \end{aligned}$$

Ainsi, X est ordinaire si et seulement si λ n'est pas une racine du polynôme Φ_p .

(Remarque : le facteur 2 dans le calcul du résidu vient de la ramification au point Q de l'application $X \rightarrow \mathbf{P}^1$ définie par x , où x n'est pas une uniformisante locale.)

4.6. Lorsque Frobenius se relève

La proposition suivante, due indépendamment à Illusie (cf. [28, 8.6]) et Nakajima, montre que lorsque Frobenius se relève, la variété est ordinaire :

PROPOSITION 4.3. — *Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$ et X/k un schéma propre et lisse sur k . On suppose qu'il existe un schéma propre et lisse $\tilde{X}/W_2(k)$ relevant X , ainsi qu'un morphisme $\tilde{F} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ relevant le morphisme de Frobenius $F : X \rightarrow X$. Alors, X est ordinaire.*

Démonstration. — Grâce à \tilde{F} , on peut relever l'isomorphisme de Cartier $C^{-1} : \Omega_X^1 \rightarrow \mathcal{H}^1 \Omega_X^\bullet$ en un morphisme $\varphi : \Omega_X^1 \rightarrow Z\Omega_X^1$. En effet, si $x \in \mathcal{O}_{\tilde{X}}$, $\tilde{F}(x) = x^p + pu(x)$, pour un élément $u(x) \in \mathcal{O}_X$. On a $\tilde{F}^*(dx) = px^{p-1} dx + pdu(x)$ et on peut définir une application $\mathcal{O}_X \rightarrow Z\Omega_X^1$ par

$$x \mapsto x^{p-1} dx + d(u(x)) = \frac{1}{p} \tilde{F}^*(d\tilde{x}).$$

C'est une dérivation additive, p -linéaire ; elle se factorise donc en une application additive et p -linéaire $\varphi : \Omega_X^1 \rightarrow Z\Omega_X^1$ (voir [9, p. 251, (b)] ou [49, Prop. 3]).

Notons α l'injection naturelle $B\Omega_X^i \hookrightarrow Z\Omega_X^i$. Comme la composée de φ et de la projection $Z\Omega_X^i \rightarrow \mathcal{H}^i \Omega_X^\bullet$ de noyau $B\Omega_X^i$ est un isomorphisme, on voit que

l'application $(\varphi, \alpha) : \Omega_X^i \oplus B\Omega_X^i \rightarrow Z\Omega_X^i$ est un isomorphisme de faisceaux en groupes abéliens. En particulier, on a pour tous i et j ,

$$H^j(\varphi, \alpha) : H^j(\Omega_X^i) \oplus H^j(B\Omega_X^i) \xrightarrow{\sim} H^j(Z\Omega_X^i).$$

Autrement dit, α induit une injection de k -espaces vectoriels $H^j(B\Omega_X^i) \hookrightarrow H^j(Z\Omega_X^i)$ dont le conoyau est de dimension $\dim_k H^j(\Omega_X^i)$.

Pour prouver que $H^j(B\Omega_X^i) = 0$, raisonnons alors par récurrence descendante sur i . C'est en effet vrai pour $i > \dim X$. Si alors $H^j(B\Omega_X^{i+1}) = 0$ pour tout entier j , la suite exacte

$$0 \rightarrow Z\Omega_X^i \rightarrow \Omega_X^i \xrightarrow{d} B\Omega_X^{i+1} \rightarrow 0$$

montre que $H^j(Z\Omega_X^i)$ et $H^j(\Omega_X^i)$ sont des k -espaces vectoriels de même dimension, si bien que $H^j(B\Omega_X^i)$ est nécessairement nul.

Ainsi, X est ordinaire. □

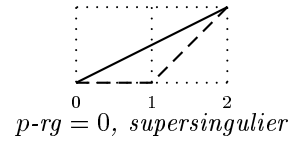
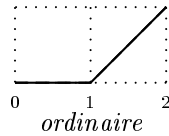
4.7. Remarque sur « supersingulier »

Soit X une variété abélienne de dimension $g \geq 1$ sur un corps k algébriquement clos de caractéristique $p > 0$. Nous avons vu que X est ordinaire si et seulement si son p -rang vaut g , ce qui équivaut au fait que F est inversible sur $H^1(X, \mathcal{O}_X)$. De même, le p -rang de X est nul si et seulement si F est nilpotent sur $H^1(X, \mathcal{O}_X)$.

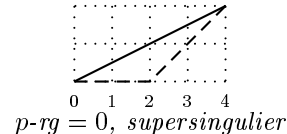
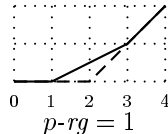
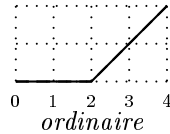
On dit que X est *supersingulière* si le polygone de Newton de $H^1(X/W)$ a une seule pente $1/2$.

Voici quelques exemples de polygones de Newton qui montrent que cette distinction p -rang nul / supersingulier ne se produit pas en dimension 1 ou 2, mais peut se produire en dimension 3 (le polygone de Newton est dessiné avec un trait continu, le polygone de Hodge est en pointillé) :

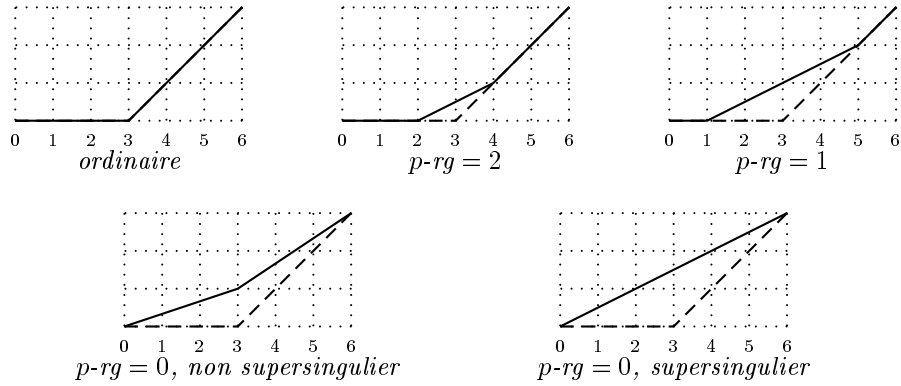
– en dimension $g = 1$:



– en dimension $g = 2$:



– en dimension $g = 3$:



Contrairement à ce que cette description pourrait laisser croire, les variétés abéliennes supersingulières peuvent être encore classées à l'aide d'invariants plus fins que le polygone de Newton.

Tout d'abord, un théorème de Oort [52] affirme qu'une variété abélienne est supersingulière si et seulement si elle est isogène à un produit de courbes elliptiques supersingulières.

Si X est une variété abélienne sur k , on définit $a(X) = \dim_k \text{Hom}(\alpha_p, X)$, où α_p est le schéma en groupes sur k , noyau de $F : \mathbf{G}_a \rightarrow \mathbf{G}_a$. Si X est supersingulière de dimension g , on a l'inégalité $1 \leq a(X) \leq g$. Toutes ces valeurs de $a(X)$ sont possibles et Oda–Oort [48, Prop. 2.1] prouvent qu'une variété abélienne supersingulière vérifie $a(X) = g$ si et seulement si elle est *isomorphe* à un produit de courbes elliptiques supersingulières.

Enfin, $F|H^1(X, \mathcal{O}_X)$ est nul si et seulement si $a(X) = g$. En effet, si $M = H^1(X/W)$ est le module de Dieudonné covariant de X , on peut montrer que $a(X) = \dim_k M/(FM + VM)$. Si $a(X) = g$, le théorème de Oda–Oort et la formule de Künneth montrent que $F = 0$. Réciproquement, on a d'après Nygaard [46] la formule

$$H^1(X, \mathcal{O}_X) = H^1(X, W\mathcal{O}_X)/V = M/VM.$$

Si $F = 0$, alors

$$a(X) = \dim_k M/(FM + VM) = \dim_k M/VM = \dim_k H^1(X, \mathcal{O}_X) = g.$$

5. Ordinarité générique

5.1. Autour du théorème de spécialisation

Grothendieck semble avoir pressenti le premier que dans une « famille » de F-cristaux, le polygone de Newton croissait par spécialisation. Le théorème suivant en est un avatar :

THÉORÈME 5.1 ([7]). — *Soit S un k -schéma de type fini et $f : X \rightarrow S$ un morphisme propre et lisse. Il existe une partition finie S_α de S par des parties localement fermées telle que le polygone de Newton de $H^i(X_s/W(s)) \otimes_{\mathbb{W}} \mathbb{Q}$ soit constant pour tout point géométrique $s \rightarrow S_\alpha$.*

De plus, si $t \rightarrow S$ est une spécialisation de s , le polygone de Newton de $H^i(X_t/W(t)) \otimes \mathbb{Q}$ est au-dessus du polygone de Newton de $H^i(X_s/W(s)) \otimes \mathbb{Q}$ et les deux ont même extrémités.

Le théorème énoncé ici est une conséquence d'un théorème abstrait sur les F-isocristaux convergents (cf. [7]).

Il admet un analogue abstrait pour les F-cristaux [31], d'ailleurs historiquement antérieur, mais qui nécessite de définir la notion de F-cristal sur une k -algèbre. À des détails (importants mais) techniques près, le schéma de la preuve est le même :

- on se ramène au cas où le F-cristal (resp. le F-isocristal convergent) comme un $W(A)$ -module libre de rang fini M (où A est une k -algèbre parfaite), muni d'une application σ -linéaire $F : M \rightarrow M$;
- en considérant des puissances extérieures, on se ramène à montrer que la première pente croît par spécialisation ;
- on réduit alors le problème à l'étude du polygone de Hodge abstrait (via la *basic slope estimate* de [31]) et à l'étude des s tels que F est multiple de p^λ , ce qui définit une condition fermée (annulation de λ composantes fantômes des coefficients de F dans $W(A)$).

Par exemple, si X/S est un schéma propre et lisse tel que les $R^i f_* \mathcal{O}_{S/W}$ sont sans torsion, X_s est ordinaire si et seulement si le polygone de Newton est égal au polygone de Hodge, ce qui définit une condition ouverte d'après le théorème de spécialisation. Il est en fait facile de démontrer ce résultat en général :

PROPOSITION 5.2. — *Soient S un schéma sur un corps k parfait de caractéristique p et X/S un schéma propre et lisse. L'ensemble des $s \in S$ tels que*

$X_s/k(s)$ est ordinaire est un ouvert de S , appelé ouvert d'ordinarité de X sur S .

Démonstration. — Notons f la projection $X \rightarrow S$. Soit $B\Omega_{X/S}^i$ l'image de $\Omega_{X/S}^{i-1}$ par la différentielle $d_{X/S}$. On commence par prouver que la formation de $Rf_*B\Omega_{X/S}^i$ commute au changement de base, si bien que X_s est ordinaire sur $k(s)$ si et seulement si $Rf_*B\Omega_{X/S}^i \otimes_{\mathcal{O}_s}^{\mathbf{L}} k(s) = 0$. Alors, une variante du lemme de Nakayama montre que $Rf_*B\Omega_{X/S}^i \otimes_{\mathcal{O}_s}^{\mathbf{L}} k(s) = 0$ si et seulement si $Rf_*B\Omega_{X/S}^i \otimes_{\mathcal{O}_s}^{\mathbf{L}} \mathcal{O}_s = 0$. Or cette dernière condition définit un ouvert de S , ce qui conclut la preuve. \square

En particulier, si S est irréductible et si l'ouvert d'ordinarité est non vide, il est dense. Par exemple, considérons la courbe elliptique d'équation affine $y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$ au-dessus du schéma $\text{Spec } k[\lambda, 1/(\lambda(1-\lambda))]$. On a vu que l'ouvert d'ordinarité est défini par une équation polynomiale $\Phi_p(\lambda) \neq 0$, ce qui montre dans ce cas que l'ouvert d'ordinarité est dense. De même la courbe de genre g générique (Miller [42], Koblitz [36]), l'intersection complète générique de dimension m et de multidegré (a_1, \dots, a_r) dans \mathbf{P}^{m+r} (Illusie [27]), la surface K3 générique (Ogus [50]) sont ordinaires. Dans de nombreux cas, le schéma de la preuve est le suivant :

– on étend la notion de variété ordinaire à des situations plus générales que celle d'une famille propre et lisse, en autorisant notamment des dégénérescences semi-stables (Si S est le spectre d'un anneau de valuation discrète R et d'uniformisante π , on demande que pour la topologie étale, le schéma soit localement isomorphe au sous-schéma fermé de \mathbf{A}_R^r d'équation $x_1 \cdots x_r = \pi$) ; cela signifie construire un complexe de formes différentielles à pôles logarithmiques, étendre l'isomorphisme de Cartier, etc.

– on prouve un critère permettant d'affirmer qu'une famille propre ayant une dégénérescence semi-stable ordinaire est génériquement ordinaire ; par exemple, le *critère de Hyodo* [27, Prop. 1.10, Prop. 2.6*] affirme la chose suivante : *Soit S un trait de caractéristique p , s le point fermé et η le point générique. Considérons un schéma propre et semi-stable X/S tel que la fibre spéciale $Y = X_s$ soit somme de diviseurs Y_i vérifiant que pour tous i_1, \dots, i_r , l'intersection $Y_{i_1} \cap \cdots \cap Y_{i_r}$ est lisse sur $k(s)$, et ordinaire. Alors, X_η est ordinaire.*

– on montre enfin que l'on peut déformer un élément donné de la famille en un schéma auquel le critère s'applique. Dans le cas le plus simple des hypersurfaces dans \mathbf{P}^{m+1} , on part d'une hypersurface $f = 0$ de degré d et on choisit (par récurrence sur d) deux polynômes g_1 et g_{d-1} de degrés 1 et $d-1$ tels que $V(g_{d-1} = 0)$ soit lisse et ordinaire, ainsi que $V(g_1 = g_{d-1} = 0)$. Introduisons le pinceau $\lambda f + \mu g_1 \cdots g_d = 0$ au-dessus de la droite projective de coordonnées homogènes $(\lambda : \mu)$. Au-dessus du point $(1 : 0)$, on obtient l'hypersurface $f = 0$, tandis qu'au-dessus de $(0 : 1)$, on a l'hypersurface semi-stable et ordinaire $g_1 g_{d-1} = 0$. Le critère permet alors de montrer qu'une hypersurface générique de ce pinceau est ordinaire, et *a fortiori* qu'il existe une hypersurface de degré d qui est ordinaire.

6. Cas des corps de nombres

6.1. Courbes elliptiques

Soit X une courbe elliptique sur \mathbf{Q} . On peut en trouver une équation à coefficients entiers de la forme⁽¹⁾ $y^2 = x^3 + ax + b$. Alors, la réduction de a et b modulo un nombre premier p , sauf pour un nombre fini de p (ceux qui divisent $6(4a^3 + 27b^2)$), fournit une courbe elliptique \overline{X}_p sur \mathbf{F}_p . La question est alors : pour quels p la courbe \overline{X}_p est-elle ordinaire ? Dans le cas où X est donnée par une équation $y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$, avec $\lambda \in \mathbf{Q}$, la question est de savoir pour quels nombres premiers p (ne divisant pas le dénominateur de λ) l'on a $\Phi_p(\lambda) \equiv 0$ modulo p .

Le théorème suivant est classique :

THÉORÈME 6.1. — *Soit X une courbe elliptique sur un corps de nombres K . Quitte à remplacer K par une extension finie, l'ensemble des places finies \mathfrak{p} de K telles que $\overline{X}_{\mathfrak{p}}$ est ordinaire est de densité strictement positive, égale à 1 si $X_{\overline{\mathbf{Q}}}$ n'a pas de multiplications complexes, à 1/2 sinon.*

En revanche, celui-ci est bien plus récent :

THÉORÈME 6.2 (Elkies, [12]). — *Soit X une courbe elliptique sur \mathbf{Q} . L'ensemble des p tels que \overline{X}_p est supersingulière est infini.*

⁽¹⁾ on part de $y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$ avec $g_2 = a/D$ et $g_3 = b/D$, d'où $Dy^2 = 4Dx^3 - ax - b$, soit encore $(4D^2)^2 D^2 y^2 = (4D^2)^3 x^3 - aD(4D^2)^2 x - bD(4D^2)^2$, et en posant $X = 4D^2 x$, $Y = 4D^3 y$, on a $Y^2 = X^3 - 4aD^3 x - 16bD^5$.

6.2. Variétés abéliennes

Soit K un corps de nombres, X une variété abélienne sur K et $\mathcal{X}/\mathcal{O}_K$ le modèle de Néron de X sur l'anneau des entiers de K . Soit $U \subset \text{Spec } \mathcal{O}_K$ le plus grand ouvert tel que \mathcal{X}_U/U est un schéma abélien.

THÉORÈME 6.3 (Ogus, [51, Prop. 2.7]). — *L'ensemble des $s \in U$ tels que le p -rang de \mathcal{X}_s est non nul est de densité strictement positive.*

Si $\dim X = 2$, l'ensemble des $s \in U$ tels que \mathcal{X}_s est ordinaire est de densité strictement positive.

Démonstration. — Soit $\ell > 2g$ un nombre premier et K'/K une extension galoisienne finie telle que les points d'ordre ℓ de X soient définis sur K' .

Si $\mathfrak{p} \in U$ est une place de K dont la caractéristique résiduelle p est totalement décomposée dans K' et vérifie $p > 4g^2$, nous allons montrer que le p -rang de $\mathcal{X}_{\mathfrak{p}}$ est non nul.

Fixons en effet une place $\bar{\mathfrak{p}}$ de \bar{K} au dessus de \mathfrak{p} et choisissons $F_{\mathfrak{p}}$ dans $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ qui relève (l'opposé de) la substitution de Frobenius $x \mapsto x^{1/p}$ de $\text{Gal}(\bar{\mathbf{F}}_p/\mathbf{F}_p)$. Comme p est totalement décomposée dans K' , $F_{\mathfrak{p}}$ fixe K' et agit ainsi trivialement sur le noyau de ℓ dans $X(\bar{K})$. Par suite, la trace $t_{\mathfrak{p}} \in \mathbf{Z}_{\ell}$ de $F_{\mathfrak{p}}$ sur le module de Tate ℓ -adique est congrue à $2g$ modulo ℓ .

Or, d'après Weil, les valeurs propres de $F_{\mathfrak{p}}$ sont des entiers algébriques a_1, \dots, a_{2g} et le p -rang de $\mathcal{X}_{\mathfrak{p}}$ est égal au nombre de ces entiers algébriques a_i tels que $v_{\mathfrak{p}}(a_i) = 0$. Enfin, les estimées archimédiennes de Weil affirment que $|a_i| \leq \sqrt{p}$ pour tout entier i et toute valeur absolue archimédienne, si bien que $|t| \leq 2g\sqrt{p}$.

Supposons par l'absurde que le p -rang de $\mathcal{X}_{\mathfrak{p}}$ est nul, c'est que tous les a_i vérifient $v_{\mathfrak{p}}(a_i) > 0$, si bien que $v_{\mathfrak{p}}(t_{\mathfrak{p}}) > 0$ et $t_{\mathfrak{p}} = \sum a_i \in \mathbf{Z}$ est multiple de p .

Puisque t est multiple de p et que $\sqrt{p} > 2g$, t est nécessairement nul. Comme $\ell > 2g$ et $t \equiv 2g \pmod{\ell}$, on a une contradiction qui montre que le p -rang de $\mathcal{X}_{\mathfrak{p}}$ est non nul.

Or, d'après le théorème de densité de Čebotarev, l'ensemble des nombres premiers p totalement décomposés dans K' est de densité de Dirichlet non nulle, ce qui conclut la démonstration de la première partie du théorème.

Quand $\dim X = 2$, on veut montrer que le p -rang de $\mathcal{X}_{\mathfrak{p}}$ est souvent égal à 2, c'est-à-dire trouver \mathfrak{p} tel que deux valeurs propres de $F_{\mathfrak{p}}$ sur $H^1(X \otimes_K \bar{K}, \mathbf{Z}_{\ell})$ soient des unités p -adiques. Dans le cas contraire, les valeurs propres de $F_{\mathfrak{p}}$ sur

$H^2(X \otimes_{\mathbf{K}} \overline{\mathbf{K}}, \mathbf{Z}_\ell) = \bigwedge^2 H^1(X \otimes_{\mathbf{K}} \overline{\mathbf{K}}, \mathbf{Z}_\ell)$ sont toutes nulles modulo p et la trace de $F_{\mathfrak{p}}$ sur $H^2(X \otimes_{\mathbf{K}} \overline{\mathbf{K}}, \mathbf{Z}_\ell)$ est de la forme $t = pt'$.

Supposons que p est totalement décomposé dans le corps K' qui rend rationnels les points d'ordre ℓ , $F_{\mathfrak{p}}$ est congru à l'identité modulo ℓ , donc sa trace sur $H^2(X \otimes_{\mathbf{K}} \overline{\mathbf{K}}, \mathbf{Z}_\ell)$ est congrue à 6 modulo ℓ . De plus, K' contenant aussi les racines ℓ^e de l'unité, $p \equiv 1$ modulo ℓ si \mathfrak{p} est totalement décomposé dans K' . On a donc $t = pt' \equiv 6 \pmod{\ell}$ et $t' \equiv 6$ modulo ℓ .

D'après les estimées de Weil, on a aussi $|t| \leq 6p$, c'est-à-dire $t' \in \{-6, \dots, 6\}$.

Choisissons $\ell > 12$. Cela implique $t' = 6$, soit $t = 6p$. Or, t est somme de six nombres algébriques de norme inférieure ou égale à p . Ils sont donc tous égaux à p . D'après le théorème de Katz–Messing [34], l'endomorphisme (linéaire) de Frobenius F sur la cohomologie cristalline $H^2(X_{\mathfrak{p}}/W(\mathbf{F}_p))$ a le même polynôme caractéristique qu'en ℓ -adique. Comme Frobenius est semi-simple dans l'algèbre des endomorphismes de $\mathcal{X}_{\mathfrak{p}}/\mathbf{F}_{\mathfrak{p}}$ tensorisée par \mathbf{Q} , il l'est a fortiori dans $H^2(X_{\mathfrak{p}}/W(\mathbf{F}_p)) \otimes \mathbf{Q}$.

Par conséquent, F est exactement la multiplication par p sur $H^2(X_{\mathfrak{p}}/W(\mathbf{F}_p))$. Par suite, le polygone de Hodge abstrait de $H^2(X_{\mathfrak{p}}/W(\mathbf{F}_p))$ a une seule pente égale à 1 , ce qui contredit le théorème de comparaison II.2.3 entre les polygones de Hodge abstraits et géométriques. \square

Références

- [1] P. BERTHELOT – *Cohomologie cristalline des schémas de caractéristique $p > 0$* , Lect. Notes Math., no. 407, Springer Verlag, 1974.
- [2] ——— « The slope filtration on crystalline cohomology », *Proc. Symp. Pure Math.* (Arcata), vol. 29, Amer. Math. Soc., 1974, p. 315–328.
- [3] ——— Le théorème de dualité plate, d’après J. S. Milne, Lect. Notes Math., no. 868, p. 203–237, Lect. Notes Math. **868**, Springer Verlag, 1978, p. 203–237.
- [4] P. BERTHELOT et A. OGUS – *Notes on crystalline cohomology*, Math. Notes, no. 21, Princeton Univ. Press, 1978.
- [5] S. BLOCH – « Algebraic K-theory and crystalline cohomology », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **47** (1978), p. 187–268.
- [6] S. BLOCH et K. KATO – « p -adic étale cohomology », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **63** (1986), p. 107–152.
- [7] R. CREW – « Specialization of crystalline cohomology », *Duke Math. J.* **53** (1986), p. 749–757.
- [8] P. DELIGNE – « La conjecture de Weil, I », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **43** (1974), p. 273–307.
- [9] P. DELIGNE et L. ILLUSIE – « Relèvements modulo p^2 et décomposition du complexe de de Rham », *Invent. Math.* **89** (1987), p. 247–270.
- [10] B. DWORK – « On the rationality of the zeta function of an algebraic variety », *Amer. J. Math.* **82** (1960), p. 631–648.
- [11] B. DWORK, G. GEROTTO et F. J. SULLIVAN – *An introduction to g -functions*, Annals of Math. Studies, no. 133, Princeton Univ. Press, 1994.
- [12] N. ELKIES – « The existence of infinitely many supersingular primes for every elliptic curve over \mathbf{Q} », *Invent. Math.* **89** (1987), p. 561–567.
- [13] H. GILLET et W. MESSING – « Cycle classes and Riemann–Roch for crystalline cohomology », *Duke Math. J.* **55** (1987), p. 501–538.
- [14] M. GROS – *Classes de Chern et classes de cycles en cohomologie de Hodge–Witt logarithmique*, Mém. Soc. Math. France, no. 21, Soc. Math. France, 1985.
- [15] A. GROTHENDIECK – Crystals and the de Rham cohomology of schemes, Adv. Stud. in pure Math., p. 306–358, Adv. Stud. in pure Math., North-Holland, 1968, p. 306–358.
- [16] ——— *Cohomologie ℓ -adique et fonctions L*, Lect. Notes Math., no. 589, Springer Verlag, 1972–73, SGA 5.
- [17] A. GROTHENDIECK, M. ARTIN et J.-L. VERDIER – *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, Lect. Notes Math., no. 269–270–305, Springer Verlag, 1972–73, SGA 4.

- [18] A. GROTHENDIECK, P. DELIGNE et N. KATZ – *Groupes de monodromie en géométrie algébrique*, Lect. Notes Math., no. 288-340, Springer Verlag, 1972-73, SGA 7.
- [19] O. HYODO – « On the de Rham–Witt complex attached to a semi-stable family », *Compositio Math.* **78** (1991), p. 241–260.
- [20] O. HYODO et K. KATO – « Semi-stable reduction and crystalline cohomology with logarithmic poles », *Périodes p-adiques* (Bures, 1988) (J.-M. Fontaine, éd.), Astérisque, no. 223, 1994, p. 221–268.
- [21] L. ILLUSIE – *Complexe cotangent et déformations, II*, Lect. Notes Math., no. 283, Springer Verlag, 1972.
- [22] ——— « Report on crystalline cohomology », *Proc. Symp. Pure Math.* (Arcata), vol. 29, Amer. Math. Soc., 1974, p. 459–478.
- [23] ——— « Cohomologie cristalline (d’après P. Berthelot) », *Séminaire Bourbaki 1974/75*, Lect. Notes Math., no. 431, 1975, exposé 456, p. 8.
- [24] ——— « Complexe de de Rham–Witt », *Journées de Géométrie algébrique de Rennes*, Astérisque, no. 63, Soc. Math. France, 1979, p. 83–112.
- [25] ——— « Complexe de de Rham–Witt et cohomologie cristalline », *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **12** (1979), p. 501–661.
- [26] ——— « Finiteness, duality and künnethe theorems in the cohomology of the de Rham–Witt complex », *Algebraic Geometry* (Kyoto–Tokyo), Lect. Notes Math., no. 1016, Springer Verlag, 1983, p. 20–82.
- [27] ——— « Ordinarité des intersections complètes générales », *The Grothendieck Festschrift* (P. Cartier, L. Illusie, N. M. Katz, G. Laumon, Yu. Manin et K. Ribet, éd.), vol. 2, Birkhäuser, 1990, p. 375–405.
- [28] ——— « Frobenius et dégénérescence de Hodge », *Introduction à la théorie de Hodge*, Panoramas et Synthèses, no. 3, Soc. Math. France, 1996, p. 113–168.
- [29] L. ILLUSIE et M. RAYNAUD – « Les suites spectrales associées au complexe de de Rham–Witt », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **57** (1983), p. 73–212.
- [30] K. KATO – « Higher local class field theory », *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.* **3** (1980), p. 603–683.
- [31] N. KATZ – « Slope filtration of F-crystals », *Journées de Géométrie algébrique de Rennes*, Astérisque, no. 63, Soc. Math. France, 1979, p. 113–164.
- [32] N. M. KATZ – « Nilpotent connections and the monodromy theorem : applications of a result of Turritin », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **39** (1970), p. 175–232.
- [33] ——— « Travaux de Dwork », *Séminaire Bourbaki 1971/72*, Lect. Notes Math., no. 317, Springer Verlag, 1973, Exp. 409, p. 167–200.
- [34] N. M. KATZ et W. MESSING – « Some consequences of the Riemann hypothesis for varieties over finite fields », *Invent. Math.* **23** (1974), p. 73–77.

- [35] S. KLEIMAN – Algebraic cycles and the Weil conjectures, Adv. Stud. in pure Math., p. 359–386, Adv. Stud. in pure Math., North-Holland, 1968, p. 359–386.
- [36] N. KOBLITZ – « p -adic variation of the zeta function over families of varieties defined over finite fields », *Compositio Math.* **31** (1975), p. 119–218.
- [37] S. LUBKIN – « Generalization of p -adic cohomology. Bounded Witt vectors », *Compositio Math.* **34** (1977), p. 225–277.
- [38] YU. I. MANIN – « The theory of commutative formal groups over fields of finite characteristic », *Russian Math. Surveys* **18** (1963), p. 1–80.
- [39] B. MAZUR – « Frobenius and the Hodge filtration », *Bull. Amer. Math. Soc.* **78** (1972), p. 653–667.
- [40] ——— « Frobenius and the Hodge filtration (estimates) », *Ann. of Math.* **98** (1973), p. 58–95.
- [41] B. MAZUR et W. MESSING – *Universal extensions and one dimensional crystalline cohomology*, Lect. Notes Math., no. 370, Springer Verlag, 1976.
- [42] L. MILLER – « Curves over a finite field with invertible Hasse-Witt matrix », *Math. Ann.* **197** (1972), p. 123–127.
- [43] J. S. MILNE – *Étale cohomology*, Math. Notes, no. 33, Princeton Univ. Press, 1980.
- [44] P. MONSKY et G. WASHNITZER – « Formal cohomology I », *Ann. of Math.* **88** (1968), p. 181–217.
- [45] D. MUMFORD – *Abelian varieties*, Oxford Univ. Press, 1974.
- [46] N. NYGAARD – « Slopes of powers of Frobenius on crystalline cohomology », *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **14** (1981), p. 369–401.
- [47] T. ODA – « The first de Rham cohomology group and Dieudonné modules », *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **2** (1969), p. 63–135.
- [48] T. ODA et F. OORT – « Supersingular abelian varieties », *Intern. Symp. on Algebraic Geometry* (Kyoto) (M. Nagata, éd.), Kinokuniya, 1977, p. 595–621.
- [49] J. OESTERLÉ – « Dégénérescence de la suite spectrale de Hodge vers de Rham », *Séminaire Bourbaki 1986/87*, Astérisque, no. 152–153, 1987, Exposé 673.
- [50] A. OGUS – « Supersingular K3-crystals », *Journées de Géométrie algébrique de Rennes*, Astérisque, no. 64, 1979, p. 3–96.
- [51] ——— Hodge cycles and crystalline cohomology, Lect. Notes Math., no. 900, ch. 6, p. 357–414, Lect. Notes Math. **900**, Springer Verlag, 1982, p. 357–414.
- [52] F. OORT – « Subvarieties of moduli spaces », *Invent. Math.* **24** (1974), p. 95–119.
- [53] J.-P. SERRE – « Sur la topologie des variétés algébriques en caractéristique p », *Symposium Internacional de Topologia Algebraica* (Mexico), 1958, p. 24–53.
- [54] ——— *Groupes algébriques et corps de classes*, Hermann, 1960.

- [55] J.-P. SERRE et J. TATE – « Good reduction of abelian varieties », *Ann. of Math.* **88** (1968), p. 492–517.
- [56] E. WARNING – « Bemerkung zur vorstehenden Arbeit von Herr Chevalley », *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **11** (1936), p. 76–83.
- [57] A. WEIL – « Number of solutions of equations in finite fields », *Bull. Amer. Math. Soc.* **55** (1949), p. 397–508.

ANTOINE CHAMBERT-LOIR, Institut de mathématiques de Jussieu, Boite 247, 4, place
Jussieu, F-75252 Paris Cedex 05 • *E-mail* : `chambert@math.jussieu.fr`